¿LOS CUBANOS SON PRIMOS?
NÚMEROS Y ACTIVIDADES MATEMÁTICAS

Ingrith Álvarez Alfonso -Diana Isabel Quintero Suica
alvarez.ingrith@gmail.com - diana.isasui@gmail.com
Universidad Pedagógica Nacional - Colombia

Tema: Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática (en todos los niveles).
Modalidad: P
Nivel educativo:Terciario
Palabras clave: Números Cubanos, números triangulares, números cúbicos, conjeturar.

Resumen
Los números primos cubanos son una expresión de las particulares relaciones que guardan las matemáticas y en espacial los números naturales. El conocer dichos números desde la lectura de un texto, en ocasiones oculta su belleza y lo asombroso de su estructura, por ende, presentar tareas a estudiantes de la educación media y primeros niveles de formación universitaria, para que descubran las características de los números cubanos, da paso a identificar los detalles de su construcción y de las relaciones entre ellos y otros tipos de números como los triangulares y los números primos.

Para construir y descubrir las características de los números primos cubanos, se presenta una secuencia de tareas que ha sido desarrollada con estudiantes para profesor de matemáticas, experiencia que ha permitido ir ajustando las tareas y que da paso a que los maestros en formación desarrollen actividades matemáticas como las de visualizar, identificar patrones, formular, verificar y generalizar conjeturas.

Actividades Matemáticas

El estudio de objetos matemáticos, sus definiciones, propiedades y relaciones con otros objetos, implica lo que muchos llaman trabajo de un matemático; algunos investigadores han logrado caracterizar acciones relacionadas con dicho trabajo y se habla hoy en día de actividades matemáticas que no necesariamente son exclusivas de los matemáticos, sino que también son desarrolladas por todos aquellos que están interesados en el estudio de las matemáticas y en su enseñanza.

Las actividades matemáticas se concretan según Álvarez, Ángel, Carranza y Soler (2013) en procesos de conjeturar y argumentar, los cuales emergen de manera simultánea y acompañados de otros procesos tales como la visualización, la identificación de patrones, la formulación, verificación y generalización de conjeturas. Para el caso de la invitación a caracterizar los números primo cubanos, se expone brevemente las principales actividades matemáticas que se considera son desarrolladas a lo largo de la solución de las tareas propuestas, sin dejar de lado que a través de la actividad de conjeturar se puede vislumbrar implícitamente el proceso de argumentar a partir de diferentes tipos de argumentos que comunican y sustentan lo conjeturado a lo largo de la solución de la secuencia de tareas.

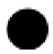
Así, *visualizar* se entiende como la actividad de observar detalladamente el objeto matemático, reconociendo de primera mano sus características, propiedades y particularidades, lo cual se asocia a representaciones gráficas y esquemas visuales evocados a partir de las estructuras conceptuales de quien observa, donde se puede tener en cuenta colores, formas, tamaños, cantidades, modelos, etc., pues esta visualización tiene como propósito generar insumos para *identificar patrones,* es decir, reconocer regularidades, propiedades, relaciones, semejanzas y explicitar las características observadas y patrones de comportamiento. Con dichos insumos se han de *formular conjeturas,* lo cual implica comunicar y expresar de forma explícita y puntual las características y regularidades observadas, puede ser en lenguaje no formal pero en un lenguaje compartido por la comunidad académica, tradicionalmente estas formulaciones se expresan de manera abreviada a través de la simbología matemática. Una vez formuladas las conjeturas, se procede a *verificarlas* contrastando las formulaciones con algunos nuevos casos, teniendo como propósito, según Álvarez, et al. (2013),que la persona se convenza de que tal afirmación tiene una alta probabilidad de ser verdadera o que la conjetura formulada es falsa ya que no se cumple para casos más allá de los inicialmente observados y por ende sería necesario reformularla. Si se logra verificar la conjetura de manera favorable (que sea cierta para nuevos casos) se procede a la *generalización* de la misma buscando expresarla de forma general y con un acercamiento al lenguaje formal, de tal manera que se convierta en una regla universal para el objeto estudiado.

Números Primos Cubanos

Con el fin de dar paso al descubrimiento y descripción de las características particulares de los números primos cubanos (propiedades, relaciones con los números primos y los números triangulares) se propone una secuencia de tareas en las que se promueve el desarrollo de las actividades matemáticas descritas anteriormente, por lo que se parte de una tarea macro la cual es subdividida en varias tareas específicas que han de orientar la formulación de conjeturas y la verificación de las mismas, conllevando a una generalización que permite representar los números primos cubanos a partir de una expresión simbólica de los números triangulares.

Tarea: Teniendo en cuenta la secuencia, determinar el número de puntos (se usa la palabra punto para no referirnos a círculo y circunferencia. Es de tener en cuenta que un punto no tiene dimensiones) necesarios para armar un hexágono regular en la posición n – P_n –. ¿Qué caracteriza dichos números?

Para abordar la tarea, en primera instanciase hace énfasis en la actividad matemática de visualización y se proponen tres pasos: observar la figura de la primera posición y describir lo que se visualiza; construir el siguiente hexágono regular utilizando 6 puntos más para rodear el punto negro del paso anterior; e imaginar construir el siguiente hexágono regular a partir del anterior, agregando 12 puntos más alrededor.

	Imagen	**Visualización**
Paso 1		Se observa un punto de color negro en el centro. No hay puntos de otros colores.
Paso 2		Los puntos adicionados son de diferente color, si se unen dichos puntos por medio de segmentos, se forman los lados de un hexágono.
Paso 3		Cada lado del “nuevo” hexágono tiene un punto más que el lado del anterior hexágono. Por cada color se está formando un triángulo.

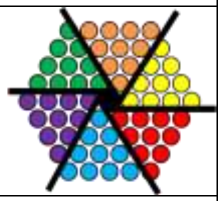
Con base en lo anterior, se presenta la primera tarea específica que tiene como propósito orientar en la identificación de la cantidad de puntos que se están agregando posición tras posición, lo cual se ha de haber identificado en el proceso de visualización (primero se colocaron 6 puntos, después 12), para luego reconocer el patrón, establecer una conjetura y verificarla, abordando este proceso a lo largo de tres momentos.

Tarea A: Determinar cuántos puntos más necesitas para construir el hexágono regular de la siguiente posición – P_4 –

	Actividad Matemática	**Registros**
Paso 1	**Identifica Patrones**	Pa: Puntos adicionales $Pa_1 = 0$ $Pa_2 = 6$ $Pa_3 = 12$
	Escribe el patrón	El número de puntos que se agrega es múltiplo de 6
Paso 2	**Conjetura**	En la posición *n* debe agregarse *6*(n-1)* puntos
Paso 3	**Verifica la conjetura**	$Pa_n = 6*(n-1)$ $Pa_1 = 6*(1-1) = 0$ $Pa_2 = 6*(2-1) = 6$ $Pa_3 = 6*(3-1) = 12$ $Pa_4 = 6*(4-1) = 18$ Viendo la tarea inicial se observa que a la figura de la posición 4, se le adicionaron 18 puntos

Tarea B: Establece cuántos puntos necesitarías en <u>total</u> para armar el hexágono regular de la posición 24 – P_{24} –

Dicha tarea, pretende aportar información desde otra perspectiva para lograr resolver la tarea inicial, enfocando la atención en los triángulos que aparecen asociados a cada uno de los lados del hexágono que se está construyendo, se busca evocar la noción de números triangulares y su representación simbólica; por lo que se proponen tres pasos que han de permitir el tránsito por las cinco actividades relacionadas con el proceso de conjeturar.

	Actividad Matemática	**Registros**
Paso 1	**Visualiza**	Se observan 6 triángulos equiláteros cada uno de diferente color. 
Paso 2	**Identifica el patrón**	La cantidad de puntos que forman los triángulos corresponde a un número triangular. T_n: Número triangular *n* (número figurado que representa la suma de los n primeros naturales) $T_n = 1+2+3+4+ \ldots + n$
	Establece regularidades	Representación / Descomposición / Triangular / Total $P_1 = 1$ / $=1$ / $=1$ / $=1$ $P_2 = 1+6$ / $=1+6(1)$ / $=1+6(T_1)$ / $=7$ $P_3 = 1+6+12$ / $=1+6(1+2)$ / $=1+6(T_2)$ / $=19$ $P_4 = 1+6+12+18$ / $=1+6(1+2+3)$ / $=1+6(T_3)$ / $=37$
Paso 3	**Formular Conjeturas**	La cantidad de puntos que va en cada posición es 1 más 6 veces la suma de los *n-1* naturales, teniendo a *n* como la posición
Paso 4	**Verifica la conjetura**	$P_5=1+6(1+2+3+4) = 1+6(T_{5-1}) = 61$ La conjetura se cumple según loobservado en el paso 1. $P_{24}=1+6(1+2+3+ \ldots +23) = 1+6(T_{23}) = 1657$

A partir de los resultados de la Tarea B, se logra llegar a una parte de la solución de la tarea macro, y es la de determinar la cantidad de puntos necesarios para armar el hexágono de cualquier posición, lo cual se concluye con la actividad matemática de **generalizar**: El hexágono regular de la posición *n* está conformado por 6 veces el número triangular *(n-1)* más una unidad que corresponde al punto con el que se inició. $P_n = 1 + 6\ (T_{n-1})$; $P_n = 1 + 6\ (n(n-1)/2)$.

Para evidenciar algunas características de los números que determinan la cantidad de puntos a usar para construir los hexágonos en cada una de las posiciones, se propone la Tarea C, a través de la cual se experimenta la secuencia de actividades matemáticas: visualizar, identificar patrones, formular y validar conjeturas.

Tarea C: La cantidad de puntos necesarios para armar los hexágonos regulares, está dada por la sucesión: S_n = 1, 7, 19, 37, 61, **91**, 127, **169**,…, 1657,…
Encuentra características comunes entre los números 7, 19, 37, 61, 127 y 1657.

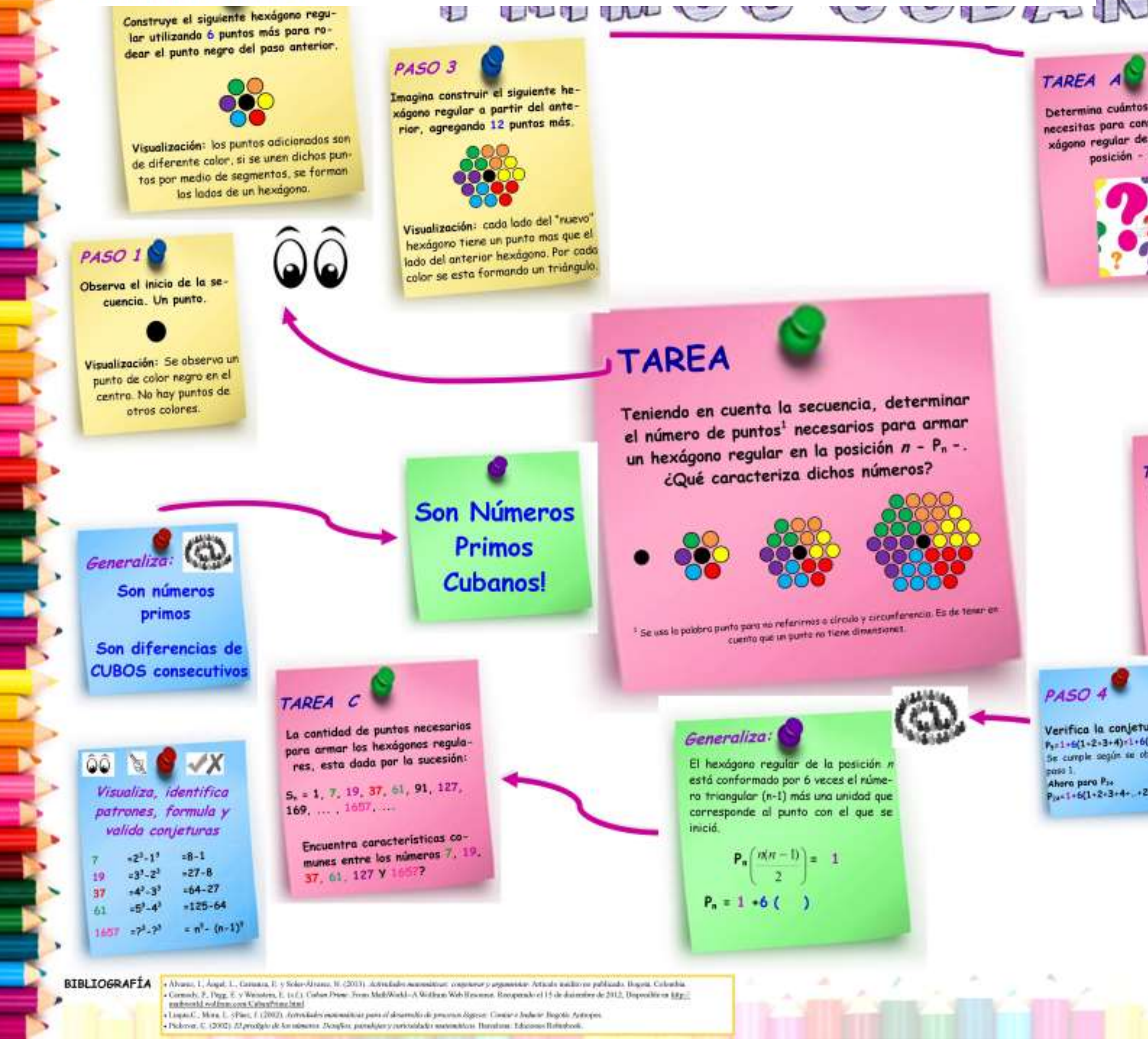
Posición	Cantidad de puntos usados	Diferencia de Cubos	
P_2	7	$= 2^3 - 1^3$	= 8 – 1
P_3	19	$= 3^3 - 2^3$	= 27 – 8
P_4	37	$= 4^3 - 3^3$	= 64 – 27
P_5	61	$= 5^3 - 4^3$	= 125 – 64
P_{24}	1657	$= ?^3 - ?^3$	= ? - ?

Luego del proceso de visualizar y observar que dichos números son primos, reconocer como patrón que se pueden expresar como diferencia de cubos, y que dichos cubos son consecutivos, se formula la conjetura: $P_n = n^3 - (n-1)^3$ y se válida para la posición 24, así $P_{24} = 24^3 - (24-1)^3 = 24^3 - 23^3 = 13824 - 10648$, logrando **generalizar** que los números seleccionados son números primos y son diferencias de cubos consecutivos. Con base en esto, se llega que dichos números son llamados Números Primos Cubanos.

Es de prestar atención a los números 91 y 169, que aunque no son primos, se pueden expresar como la multiplicación de dos primos 91= 13*7 y 169= 13*13, una nueva característica que se deja a la curiosidad del lector, para determinar si se cumple para todos aquellos números que hacen parte de la sucesión (cantidad de puntos que se necesitan para construir los hexágonos) pero que no cumplen la característica de ser primos por lo que no se consideran como primos cubanos.

Conclusiones

Proponer tareas de exploración y descubrimiento de propiedades de objetos matemáticos, a estudiantes de la educación media y primeros niveles de formación universitaria, promueve el acercamiento al desarrollo de actividades matemáticas, desmitificando la idea de que las mismas son solo para los matemáticos, despertando la expectativa e interés y dejando evidencia de qué es posible seguir fascinándose con particularidades de las matemáticas.


Construye el siguiente hexágono regular utilizando 6 puntos más para rodear el punto negro del paso anterior.
Visualización: los puntos adicionados son de diferente color, si se unen dichos puntos por medio de segmentos, se forman los lados de un hexágono.
PASO 3
Imagina construir el siguiente hexágono regular a partir del anterior, agregando 12 puntos más.
Visualización: cada lado del "nuevo" hexágono tiene un punto mas que el lado del anterior hexágono. Por cada color se esta formando un triángulo.
TAREA A
Determina cuántos
necesitas para con
xágono regular de
posición -
PASO 1
Observa el inicio de la secuencia. Un punto.
Visualización: Se observa un punto de color negro en el centro. No hay puntos de otros colores.
TAREA
Teniendo en cuenta la secuencia, determinar el número de puntos[1] necesarios para armar un hexágono regular en la posición n - Pn -. ¿Qué caracteriza dichos números?
[1] Se usa la palabra punto para no referirnos a círculo y circunferencia. Es de tener en cuenta que un punto no tiene dimensiones.
Son Números Primos Cubanos!
Generaliza:
Son números primos
Son diferencias de CUBOS consecutivos
PASO 4
Verifica la conjetu
Se cumple según lo ob
paso 1.
Ahora para P
TAREA C
La cantidad de puntos necesarios para armar los hexágonos regulares, esta dada por la sucesión:
Sn = 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, ... , 1657, ...
Encuentra características comunes entre los números 7, 19, 37, 61, 127 Y 1657?
Generaliza:
El hexágono regular de la posición n está conformado por 6 veces el número triangular (n-1) más una unidad que corresponde al punto con el que se inició.
$P_n\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = 1$
$P_n = 1 + 6(\quad)$
Visualiza, identifica patrones, formula y valida conjeturas
7 $=2^3-1^3$ $=8-1$
19 $=3^3-2^3$ $=27-8$
37 $=4^3-3^3$ $=64-27$
61 $=5^3-4^3$ $=125-64$
1657 $=?^3-?^3$ $=n^3-(n-1)^3$
BIBLIOGRAFÍA

Referencias bibliográficas

Álvarez, I.,Ángel, L., Carranza, E. y Soler-Álvarez, N. (2013). Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar. *Artículo inédito no publicado*. Bogotá, Colombia.

Carmody, P., Pegg, E. y Weisstein, E. (s.f.). *Cuban Prime*. From MathWorld--A Wolfram Web Resource. Disponible en: http://mathworld.wolfram.com/CubanPrime.html Consultado el 15 de diciembre del 2012

Luque, C., Mora, L. y Páez, J. (2002). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Contar e Inducir*. Bogotá: Antropos.

Pickover, C. (2002). *El prodigio de los números. Desafíos, paradojas y curiosidades matemáticas.* Barcelona: Ediciones Robinbook.