NOVEDADES EDUCATIVAS

Abril 2015 | N° 292 | Año 27
AR $45 | MX $110 m/n | ISSN 0328-3534
www.noveduc.com

Cultura matemática

» Significados y sentidos
» Juegos, problemas y acertijos
» Competencias y destrezas

Diversidad e inclusión

» Pedagogía de la vulnerabilidad
» La expresión de los niños con NEE
» Clima socio-emocional en las aulas

FORMACIÓN DOCENTE
Acompañamiento para principiantes

INTEGRACIÓN
Discapacidad, corporeidad y cuidados

OPINIÓN
Planeta perfecto

NOVEDADES EDUCATIVAS

SUMARIO #292

Abril 2015 | Nº 292 | Año 27

STAFF

EDITORA PROPIETARIA
› Beatriz Noemí Kaplan

DIRECTOR
› Daniel Horacio Kaplan

PRODUCCIÓN GENERAL
› Ada Kopitowski

CORRECCIÓN
› Miriam Steinberg

DIAGRAMACIÓN
› Visual DG
› Andrea Melle

DISEÑO DE PORTADA
› David Kaplan
› Andrea Melle

FOTOGRAFÍA DE PORTADA
› Bigstock.com/Juriah

Reg. Prop. Intelectual Nº 5.207.280.
Marca Registrada Nº 1.754.347.
ISSN 0328-3534.

La Revista **Novedades Educativas** es propiedad de Beatriz Noemí Kaplan, editada por el **Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico S.R.L.** Los números atrasados se venden al valor del último ejemplar en circulación. Los editores no necesariamente coinciden con los conceptos y contenidos de los artículos firmados por los autores, ni adhieren o garantizan los servicios y productos ofrecidos en los espacios publicitarios. Todas las sugerencias y opiniones serán bienvenidas, esta publicación es un servicio de comunicación docente y abre sus páginas a las informaciones y colaboraciones de sus lectores. Pueden enviar colaboraciones a «editor@noveduc.com», en formato RTF, adjuntando una autorización para su publicación. **No nos obligamos a publicar ni a reintegrar el material.** Las gacetillas de prensa se publican gratuitamente en función del espacio disponible. Si en alguna localidad la revista no se consigue con facilidad, aguardamos sus sugerencias para mejorar la distribución. Impreso en Argentina. Printed in Argentina. Impreso en Buenos Aires Print, Pte. Sarmiento 459, Lanús Este, provincia de Buenos Aires.

ARGENTINA

Centro de Publicaciones Educativas y Material Didáctico S.R.L.
Domicilio legal:
Av. Corrientes 4345 (C1195AAC) | Buenos Aires
Tel. (5411) 4867-2020
E-mail: contacto@noveduc.com

MÉXICO

Ediciones Novedades Educativas de México S.A. de C.V.
Telefax: 53 96 59 96 / 53 96 60 20
E-mail: info@novemex.com.mx

» Columna de Opinión

» Más allá de la diversidad y la inclusión

» Cultura matemática

» Formación Docente

» Misceláneas

Los octangulares y algunas actividades matemáticas

Ingrith Álvarez Alfonso y Diana Isabel Quintero Suica

Concebir espacios de trabajo en el aula donde se logren vivenciar actividades propias de los matemáticos es una alternativa metodológica que se propone con el fin de romper la rutina, mostrar la belleza de los objetos que se estudian y darles sentido. Así, en este artículo se presenta una tarea que ha de permitir desarrollar actividades matemáticas tales como visualizar, identificar patrones, conjeturar, validar y hasta, en algunos casos, generalizar.

Para comenzar

En el ámbito de la Educación Matemática los retos de enseñanza a los que se ve expuesto el docente son cada vez más exigentes, a tal punto de asumir, implícita o explícitamente, la responsabilidad de aportar herramientas, conceptuales, procedimentales y actitudinales para que sus estudiantes se perfilen como ciudadanos matemáticamente competentes, para lo cual se requiere, entre otras cuestiones, el desarrollo del pensamiento matemático. Particularmente, en Colombia, a partir de algunos lineamientos (MEN 1998 y MEN 2006), se puede interpretar que el aula de clase debe adoptar un ambiente en el cual los estudiantes asuman tareas propias de los matemáticos y a través de ellas experimenten acciones relacionadas con la construcción del conocimiento, por lo que se hace hincapié en que se aborden procesos generales relacionados con la actividad matemática, entre los que se pueden encontrar, la resolución de problemas, la modelación, el razonamiento, etcétera, de tal forma que los estudiantes logren vivenciar actividades como visualizar, identificar, organizar, categorizar, relacionar, comparar, verbalizar, simbolizar, modelar, deducir, inducir, generalizar, argumentar, verificar, probar, explicar, etcétera.

Buscar alternativas metodológicas que concreten y materialicen estas recomendaciones ha generado el interés por llevar al aula de clase tareas que se consideran propias de los matemáticos, y que han de permitir abordar actividades matemáticas –actividades de los matemáticos–, las cuales consisten en:

> (...) estudiar los elementos que aparecen en un determinado contexto con el propósito de identificar y caracterizar comportamientos y propiedades para abstraer estructuras, modelar situaciones, aplicar estos modelos, y en la medida de las posibilidades, si el contexto lo permite, generar nuevas teorías o actualizar las existentes de tal manera que se evidencie la aplicabilidad de las mismas (Álvarez, Ángel, Carranza y Soler-Álvarez, 2014, p. 76).

Dichas actividades se pueden categorizar en los procesos de *conjeturar* y *argumentar*, tal y como lo proponen Álvarez et ál. (2014). Dentro del proceso de conjeturar se generan acciones que están ligadas a:

- La *visualización* de los objetos matemáticos, con el fin de identificar características y posibles relaciones que se pueden dar entre ellas, esto basado en el conocimiento previo de quien aborda la tarea.
- La *identificación de patrones*, relaciones, propiedades, etc., permite decantar la información obtenida a través de la visualización e identificar lo que es relevante, y caracteriza de manera particular al objeto de estudio.
- La *formulación de conjeturas* es el momento en el que se comunica de manera simbólica –ya sean símbolos matemáticos o los símbolos de la lengua escrita– las regularidades identificadas, con el propósito de proceder a la *verificación* de la conjetura, actividad bajo la cual se ha de convencer a otros y a sí mismo de que la afirmación puede llegar a ser ciento por ciento verdadera, validándola a través de casos particulares.
- Por último, la *generalización* y *validación* de la conjetura implica un nivel superior en la actividad matemática, pues se requiere comprender y aceptar que la afirmación propuesta –conjetura–, aunque es válida para casos particulares, debe ser fiable para cualquier caso, asumiendo así el carácter de regla, lo cual no implica un proceso formal de demostración, pero si una argumentación lo suficientemente consistente para proceder posteriormente, si el caso lo amerita, a la *demostración* de la conjetura.

Así, siguiendo a Álvarez et ál. (2014), las actividades anteriormente descritas estructuran y consolidan el proceso matemático

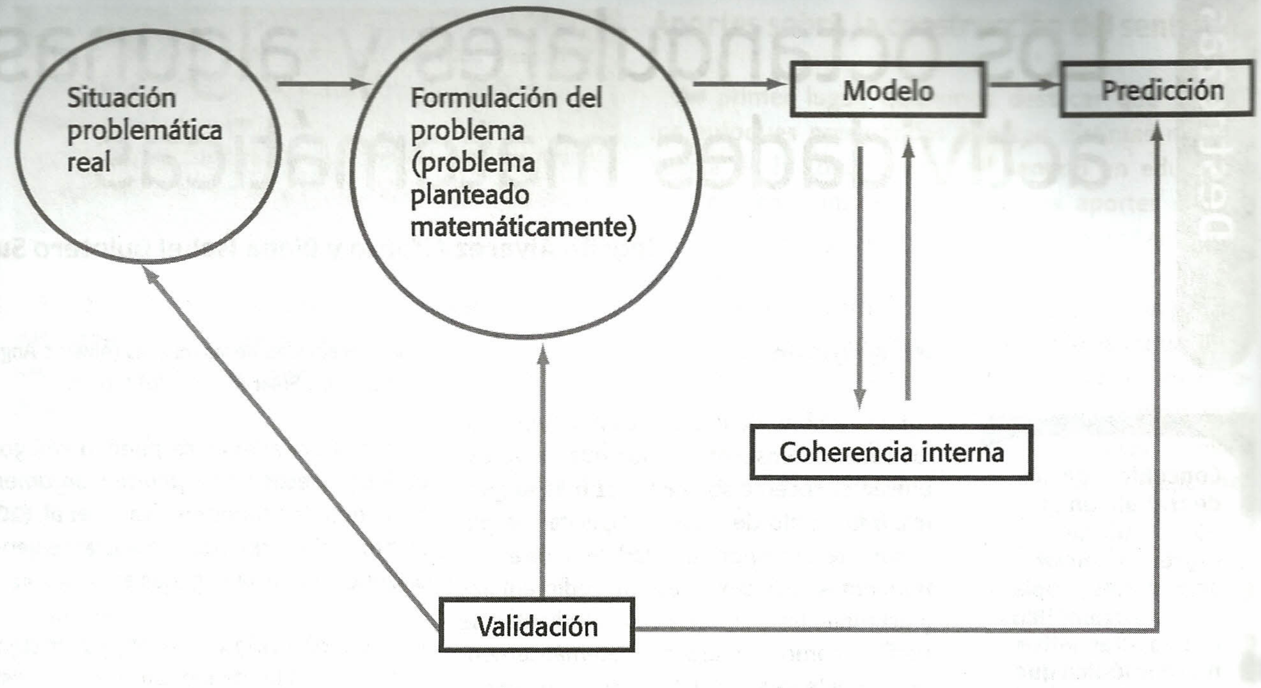


Imagen 1. Elementos básicos de la construcción de modelos, tomada de MEN, 1998.

de *conjeturar*, y si se logra que en las aulas de matemáticas de los diversos niveles académicos los estudiantes se acerquen a este tipo de actividades a través de propuestas de enseñanza enfocadas en la solución de problemas, se estará aportando al desarrollo de su pensamiento matemático, pues de manera específica, la actividad de *formular conjeturas* se articula de manera directa con el proceso general de *modelación,* el cual está asociado con la acción de generar un modelo matemático –conjunto de símbolos y relaciones matemáticas (Biembengut, s/f)– que permite expresar la interrelación entre el mundo real –objeto de estudio– y las matemáticas (MEN 1998, MEN 2006), modelo que se ha de poner a prueba llevándolo de regreso al mundo real a través de la actividad de validación *(Imagen 1).*

Para emprender el trabajo en el aula de clase con este tipo de actividades y procesos, se propone salir de la rutina y un poco de la tradición de abordar números poligonales[1], por lo que se presenta una tarea relacionada con números poliédricos o figurados tridimensionales, los cuales se pueden modelar físicamente apilando representaciones de un número poligonal (Conway y Guy, 1995). Una muestra de este tipo de números son los que se pueden representar por medio de la construcción de poliedros regulares, como es el caso de los octaédricos o los tetraédricos; o los representados por poliedros estrellados, como es el caso de los números octangulares[2].

Los números octangulares o de la estrella octángula, se consideran como una sucesión de números que se caracteriza por representar la cantidad de "puntos"[3] necesarios para construir un poliedro estrellado no convexo, que se encuentra compuesto por dos tetraedros en macla inscritos en un cubo, de tal forma que las aristas de la estrella corresponden a las diagonales de las caras del cubo y los vértices de esta coinciden con los del mismo cubo. Dicho poliedro platónico dual, según lo registra Guillen (1997), fue nombrado por Pacioli como *Octaedron elevatum* y redescubierto por Johannes Kepler (1571-1630) en 1609, quien se dedicó a estudiarlo y lo renombró como *Stella octangula* (palabras en latín), también conocido como la estrella de Kepler *(Imagen 2).*

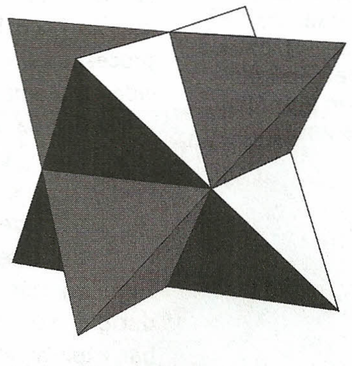
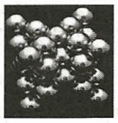
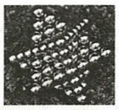
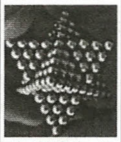
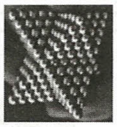
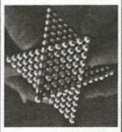


Imagen 2. Estrella de Kepler.

Ahora sí... ¡a trabajar!

Esta propuesta lleva al aula de matemáticas[4] una alternativa metodológica que parte de la formulación de situaciones problema dentro del contexto propio de las matemáticas y que integra el pensamiento numérico y sistemas numéricos con el pensamiento espacial y sistemas geométricos (MEN, 1998), aportando al desarrollo del pensamiento matemático a través de los procesos generales de la modelación, la comunicación y la resolución de problemas. Así, se propone trabajar con la estrella de Kepler, como objeto de estudio a través del cual, y resolviendo tareas, se abordarán algunas de las actividades matemáticas mencionadas en líneas anteriores.

La tarea

Imagen						...		...	
Posición	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	...	P_{24}	...	P_n
Cantidad de puntos en cada posición	1	14	51	124	245	...	27624	...	?

Consigna:

Teniendo en cuenta la anterior secuencia, determinar el número de "puntos" necesarios para armar la estrella de Kepler de la posición n -Pn-. ¿Qué caracteriza a la cantidad de puntos (dichos números) requeridos para la respectiva construcción?

De acuerdo con las características del grupo de estudiantes con el que se esté trabajando, es viable que antes de presentar el enunciado de la *tarea*[5] –situación problema–, se trabaje con material manipulativo que permita la construcción física de algunas de las estrellas y sino de todas las que se presentan en la secuencia, para ello se recomiendan los *nanodots*[6], el origami, la plastilina, entre otros *(Imagen 3)*.

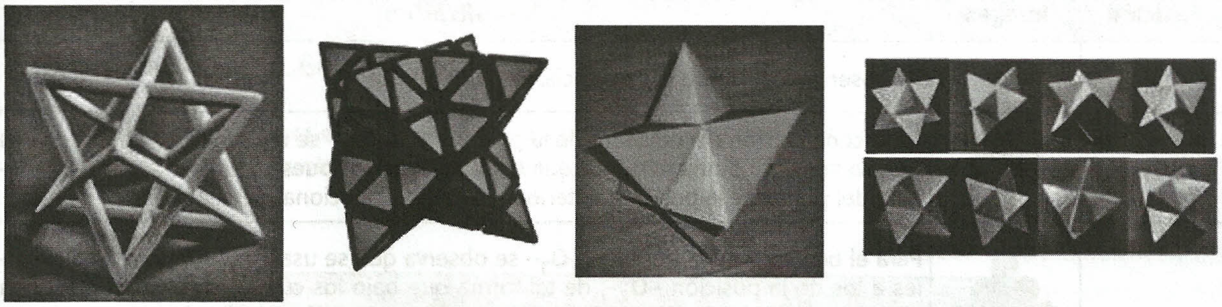


Imagen 3. Estrella de Kepler construida en diversos materiales.

Veo, veo... ¿qué veo? -visualizar-

Para dar paso a la solución de la tarea, se propone hacer especial énfasis en la actividad de *visualizar* los elementos que componen las estrellas octangulares. Aunque se reconoce y considera variedad de elementos (vértices, aristas, caras, pirámides, cubos, etc.), la idea aquí desarrollada se fundamenta en la experiencia de un estudiante al enfrentarse a la tarea, quien en esta primera parte del proceso de visualizar, identificó un octaedro y ocho tetraedros, uno en cada una de las caras del octaedro *(Imagen 4)*.

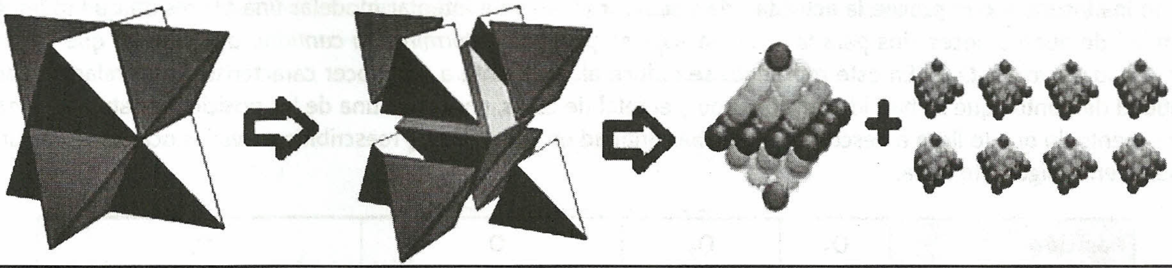
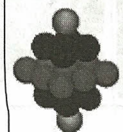
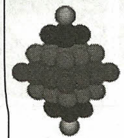
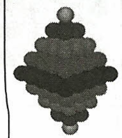


Imagen 4. Visualización de elementos que componen la estrella de Kepler.

Una primera tarea... más sencilla

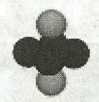
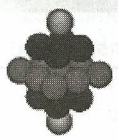
Con base en lo anterior, la tarea general se subdivide en dos tareas particulares. Esta primera tiene como finalidad establecer un modelo matemático para los números que caracterizan la cantidad de puntos necesarios en la construcción del octaedro visualizado en la actividad anterior. Dicha tarea se formula así:

Tarea A. Octaedro: *Teniendo en cuenta lo visualizado, determinar el número de "puntos" necesarios para armar el octaedro de la posición n* $-O_n-$

Imagen						...		...	
Posición	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	...	P_{24}	...	O_n
Cantidad de puntos en cada posición	1	6	19	34	85	...	9224	...	?

Otra vez, ¿ves? -visualizar-

Nuevamente, se identifica que de manera instintiva el estudiante pone en práctica la actividad matemática de *visualizar*, mediante la cual identifica la cantidad de puntos necesarios para construir los octaedros de las primeras tres posiciones, describiendo[7] dicha cantidad a partir de la acción de adicionar puntos a la figura de la posición anterior, ubicándolos en arreglos cuadrados "debajo" de la base cuadrada de mayor tamaño.

Posición	Imagen	Visualización
O_1		Se observa el inicio de la secuencia. Hay un "punto".
O_2		En la construcción del octaedro de la posición dos $-O_2-$ se utilizan cinco "puntos" más que en la posición uno $-O_1-$, tal que cuatro quedan dispuestos en forma cuadrada debajo del punto de la posición anterior, y el "punto" adicional debajo de estos cuatro.
O_3		Para el octaedro de la posición $-O_3-$ se observa que se usan trece "puntos" adicionales a los de la posición $-O_2-$, de tal forma que bajo los cuatro "puntos" que forman el cuadrado de la posición $-O_2-$ se encuentren nueve "puntos", y bajo estos nueve, los cuatro restantes, teniendo en cuenta que cada nuevo conjunto de "puntos" está dispuesto en forma cuadrada.

Cabe anotar que aunque se describe lo observado atendiendo a la cantidad de puntos que se *añadían* a la posición anterior y su disposición para la construcción del objeto[8], en adelante se trabaja con la cantidad de puntos *totales* que componen el cuerpo geométrico de cada posición; a partir de lo cual se ilustra uno de los posibles caminos a seguir.

¿Cómo se comportan?... regularidades, patrones

Con los insumos que provee la actividad de visualizar y antes de intentar modelar una expresión que indique la cantidad de puntos necesarios para la posición $-O_n-$, se propone *determinar la cantidad de "puntos" que se necesitan en la posición* $-O_{24}-$. En este momento se induce al estudiante a reconocer características en relación con la cantidad de puntos que se han ido adicionando y el total de estos, para cada una de las posiciones estudiadas hasta el momento, lo que lo lleva a descomponer dicha cantidad en sumandos, y reescribirla en varias ocasiones, según se observa en la siguiente tabla.

Posición	O_1	O_2	O_3	O_4
Puntos Totales	1	6	19	34
Descomposición	1	1+5	1+5+13	1+5+13+25
Reformulación #1	1	1+1+4	1+1+4+4+9	1+1+4+4+9+9+16
Reformulación #2	1	$1^2+1^2+2^2$	$1^2+1^2+2^2+2^2+3^2$	$1^2+1^2+2^2+2^2+3^2+3^2+4^2$
Factorización	1	$2[1^2]+2^2$	$2[1^2+2^2]+3^2$	$2[1^2+2^2+3^2]+4^2$

A pronunciarse... Formular conjeturas

Con estas formas de reescribir la cantidad total de puntos que conforma cada uno de los octaedros de las cuatro primeras posiciones, a través de sumandos y potencias, la regularidad expresada es: *"la cantidad de puntos en una posición se conforma de duplas de números naturales al cuadrado en una unidad anterior a la posición, más el número de la posición al cuadrado".* La cual se utiliza para dar respuesta a la tarea inmediatamente anterior, es decir, que *la cantidad de puntos requerida para construir el octaedro de la posición 24 -O_{24}- es el doble de la suma de los n-1 números cuadrados más n^2, siendo n la posición.*

¿Será que sí?... ¡Verifiquemos la conjetura!

Luego de esto, se verifica la conjetura calculando la cantidad de puntos para el octaedro de la posición 5 -O_5- y comparando con la información dada, para lo que se tiene:

$$O_5 = 2[1^2+2^2+3^2+4^2]+5^2 = 85$$

Como se "comprueba" que la conjetura se puede aplicar y es válida para esta posición, se calcula la cantidad de puntos totales para otra posición (-O_{24}-) con el fin de tener más evidencias, y un poco más de seguridad en relación con que la conjetura planteada es válida.

$$O_{24} = 2[1^2+2^2+3^2+\ldots+23^2]+24^2 = 9224$$

Ahora... para todos... Generalizar

A partir de lo hecho hasta el momento se procede a *generalizar*, buscando dar respuesta a la Tarea A, con el fin de determinar, *¿cuántos puntos se requieren para construir el octaedro de la posición n -O_n-?*. La generalización se describe así:

Enunciando	Modelo
La cantidad de puntos requerida en cada posición es el doble de la suma de los (n-1) primeros números cuadrados más el cuadrado de la posición.	$O_n = 2[1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2]+n^2$

Para simplificar la expresión obtenida anteriormente, ya que los cálculos, cuando *n* toma un valor muy grande, son difíciles de realizar, se sustituye la suma de los primeros *n* números naturales al cuadrado por el modelo que la representa[9], lo que facilitará el trabajo para dar solución a la tarea principal.

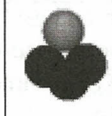
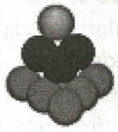
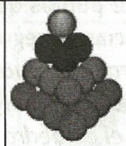
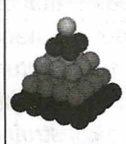
Seguido de la sustitución, al realizar un procedimiento algebraico, se puede obtener la siguiente expresión que permite calcular con mayor facilidad la cantidad de puntos totales de un octaedro para cualquier valor de *n*.

$$\boxed{O_n = \frac{1}{3}n(2n^2+1)}$$

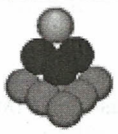
Segunda tarea... aún más sencilla

Con la información ya consolidada en relación con la cantidad de puntos necesarios para la construcción de los respectivos octaedros, se plantea una segunda tarea, que contribuirá a la solución del problema inicial –tarea general–. Esta tiene como propósito hallar una expresión matemática que permita representar la cantidad de puntos necesarios para la construcción de uno de los tetraedros, ya que con esta información posteriormente se ha de multiplicar por ocho, que es la cantidad de tetraedros que conforma la estrella octangular. La tarea se describe a continuación.

Tarea B. Tetraedros: *Atendiendo a la secuencia, determinar el número de puntos necesarios para armar el tetraedro de la posición n -Te_n-*

Imagen						...	...	...	
Posición	Te_1	Te_2	Te_3	Te_4	Te_5	...	Te_{24}	...	Te_n
Cantidad de puntos totales	1	4	10	20	35	...	2600	...	?

Para abordar esta tarea se procede de manera análoga a lo realizado con la tarea del octaedro. Se **visualiza** la cantidad de puntos necesarios para obtener cada uno de los tetraedros de las primeras tres posiciones de la secuencia, caracterizando la forma de construcción de estos a partir de la acción de *adicionar* puntos a la posición anterior.

Posición	Imagen	Visualización
Te_1		Se observa que el inicio de la secuencia se da con "punto". *
Te_2		Se construye el tetraedro de la posición Te_2 utilizando tres puntos más, tal que queden dispuestos en forma triangular debajo (como base) del punto de la posición Te_1
Te_3		Ahora, se construye el siguiente tetraedro –Te_3– utilizando seis puntos más, tal que queden dispuestos como base de forma triangular equilátera, bajo los puntos de la posición anterior Te_2.

** Dicho punto, representa el número 1 como primer número de una secuencia.*

Con ustedes... ¡los triangulares!

Teniendo esta descripción se propone retomar (en caso de ya haber trabajado con este tipo de números) o formular un modelo matemático a través del cual se comunique la cantidad de puntos adicionales que se requieren para construir el tetraedro en una posición *n*. Esta tarea condensa las mismas actividades matemáticas mencionadas en este artículo, lo que conlleva a construir la expresión general de los números triangulares, los cuales modelan el asunto en cuestión. Una breve presentación de ellos se da en la Imagen 5, en donde se inicia con la actividad de visualización de un arreglo de puntos pero organizados de manera diferente a lo expuesto en los tetraedros, siendo otro modelo gráfico para los números triangulares[10].

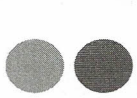
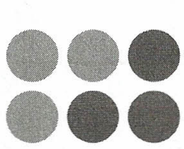
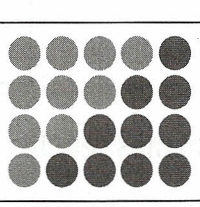
NÚMEROS TRIANGULARES

Posición	T1	T2	T3	T4	T5
Número de puntos	1	3	6	10	15

El número triangular de la posición *n* se forma sumando *n* puntos al triangular anterior

$T_1+2=T_2$	$T_2+3=T_3$	$T_3+4=T_4$
1+2	1+2+3	1+2+3+4

Establece un patrón: para obtener el número de puntos del número triangular *n* se deben sumar los *n* primeros números naturales.

Identifica regularidades				**Generaliza**
				El número de puntos requerido para construir el número triangular de la posición *n* es $\frac{n(n+1)}{2}$
2(1)=2	2(1+2)=3*2	2(1+2+3)=3*4	2(1+2+3)=4*5	

Establece una conjetura	**Verifica la conjetura**
El doble de la suma de los *n* primeros números naturales es igual al producto *n*(n+1)*	$2^*T_5=2(1+2+3+4+5)=5^*6$ O sea que $2T_n = n(n+1)$

Imagen 5. Actividades matemáticas para un modelo simbólico de los números triangulares.

Usando dicha generalización se comprueba que para construir el tetraedro de la posición 4 -T_4- se necesita *adicionar* exactamente 10 puntos.

Continúan los... tetraédricos

Retomando la idea principal de esta segunda tarea, y una vez generalizada la expresión para los puntos adicionales (los triangulares), se abordan las actividades matemáticas necesarias para obtener un modelo matemático que represente la cantidad de puntos *totales* de los tetraedros para cada una de las posiciones.

Para continuar con la tarea se *visualiza* el *número de puntos de cada "capa" que constituyen un determinado tetraedro* y con esta información, se registran los datos conseguidos con el fin de poder **identificar una regularidad**.

Posición	Visualización	Regularidades	Total
Te_1	El primer tetraedro se compone de un punto	$1 = \frac{1*2}{2} = \sum_{n=1}^{1} \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{n=1}^{1} T_n$	1
Te_2	El segundo se compone de un punto y tres más. Primer y segundo número triangular	$1+3 = \frac{1*2}{2} + \frac{2*3}{2} = \sum_{n=1}^{2} \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{n=1}^{2} T_n$	4
Te_3	Las "capas" del tercer tetraedro se representan por los tres primeros triangulares	$1+3+6 = \frac{1*2}{2} + \frac{2*3}{2} + \frac{3*4}{2} = \sum_{n=1}^{3} \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{n=1}^{3} T_n$	10
Te_4	Lo mismo pero más el cuarto triangular	$1+3+6+10 = \frac{1*2}{2} + \frac{2*3}{2} + \frac{3*4}{2} + \frac{4*5}{2} = \sum_{n=1}^{4} \frac{n(n+1)}{2} = \sum_{n=1}^{4} T_n$	20

Reconocer y establecer la regularidad del comportamiento de la cantidad de puntos totales en las primeras cuatro posiciones permite dar el paso a **formular una conjetura**: *la cantidad de puntos totales que se requieren para construir el tetraedro de la posición n es igual a la sumatoria de los primeros Te_n números triangulares*. Como es habitual, luego de formular la conjetura esta se **verifica** para algunos casos, por ejemplo se calcula la cantidad de puntos necesarios para construir el tetraedro de la posición cinco -Te_5- y la posición 24 -Te_{24}-.

$$Te_5 = \sum_{n=1}^{5} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6} * [5*(5+1)*(5+2)] = 35$$

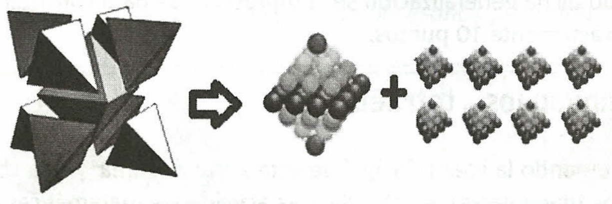
$$Te_{24} = \sum_{n=1}^{24} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6} * [24*(24+1)*(24+2)] = 2600$$

Una vez hecha la verificación se procede a **generalizar**, lo cual permite afirmar que la cantidad de puntos para el tetraedro de la posición *n* corresponde a la suma de los primeros T_n números triangulares, lo cual se puede expresar como:

$$\boxed{Te_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{n(i+1)}{2} = \frac{n*(n+1)*(n+2)}{6}}$$

¡Por fin!... La solución

Lo desarrollado en la **Tarea A** y en la **Tarea B** aporta los elementos para la solución de la tarea general. Antes de presentar dicha solución, cabe hacer un resumen de lo logrado hasta el momento en relación con las generalidades formuladas:

La estrella octángula de cualquier posición está compuesta por un octaedro y ocho tetraedros.	
La expresión algebraica para la cantidad de puntos totales de cualquier octaedro es:	$O_n = \frac{1}{3} n(2n^2 + 1)$
La expresión algebraica para la cantidad de puntos requeridos en la construcción de un tetraedro es:	$Te_n = \frac{n * (n+1) * (n+2)}{6}$

Con base en estos datos, se puede establecer de forma **general** que la cantidad de puntos totales para construir la estrella de Kepler de cualquier posición, es equivalente a:

$$Oct_n = \frac{1}{3} n(2n^2 + 1) + 8 * \left(\frac{n * (n-1) * (n+1)}{6}\right)$$

Aplicando algunos procedimientos algebraicos se puede transformar esta expresión en una más sencilla, que es la que tradicionalmente se encuentra en los textos:

$$\boxed{Oct_n = n * (2n^2 - 1)}$$

Otros caminos, otras ideas

Lo desarrollado en las líneas anteriores muestra que la primera actividad matemática que se aborda en este y muchos otros tipos de tareas asociadas al rol del matemático, está relacionada con la visualización; por lo que la visualización aquí exhibida para la estrella de Kepler –octaedro y tetraedros–, por supuesto, no es la única. Sin embargo, la capacidad de identificar visualmente componentes diferentes, que aporten al desarrollo de la tarea, depende en gran medida de las imágenes presentadas, ya que los colores y materiales pueden favorecer una u otra configuración. Debido a ello, y para enriquecer el trabajo en el aula de clase se hace una invitación a trabajar con material concreto (como por ejemplo, plastilina, juegos de lego, papiroflexia, etc.) que permitan modelar el poliedro estrellado para la concreción de conceptos geométricos y el descubrimiento de nuevas propiedades que, seguramente, una descripción verbal, una representación gráfica en dos dimensiones o una expresión simbólico-algebraica no permitiría evidenciar a simple vista (Alsina, Burgués y Fortuny, 1991).

El abordar las representaciones de la estrella de Kepler a partir de diferentes materiales, desemboca en otras configuraciones tales como la de dos tetraedros en macla que se encuentran inscritos en un cubo. A partir de esta se favorece la visualización de la cantidad de vértices, aristas, la coincidencia de los vértices de la estrella con los del cubo en el que se encuentra inscrito y de las aristas del poliedro estrellado con las diagonales de las caras del cubo; o la configuración de un octaedro compuesto de dos pirámides de base cuadrada unidas por sus bases. Si la base de una de ellas es un cuadrado de longitud *n* "puntos", el cuadrado de la base de la otra pirámide, tendrá una longitud de *n-1* puntos. Estas configuraciones dan paso a diversos caminos para abordar la *tarea general* y enriquecen procesos matemáticos como la argumentación, pues se espera que el proceso de modelación a partir de cualquiera de las anteriores visualizaciones u otras que surjan, desemboque en la expresión $Oct_n = n * (2n^2 - 1)$, una vez se hayan implementados algunos procesos algebraicos, lo cual conlleva a que los estudiantes tengan la necesidad de explicar –argumentar– sus soluciones y procedimientos, demostrando así que diversas expresiones representan una solución para la tarea planteada.

De otra parte, aunque aquí se presenta una propuesta para desarrollar actividades matemáticas utilizando los números octangulares (números figurados tridimensionales), dichas actividades también se pueden ver reflejadas en la construcción de modelos matemáticos para los números figurados bidimensionales, como fue el caso de los números triangulares y como pueden ser los números cuadrados y números primos cubanos[11].

Este tipo de actividades permiten conjugar el desarrollo del pensamiento espacial y sistema geométrico con el pensamiento numérico y sistemas de numeración (MEN, 2006), lo cual abre un nuevo reto en relación con la tarea propuesta, que consiste en partir de la expresión algebraica, proponer la tarea de generar representaciones geométricas que expliquen el significado de dicha expresión[12]. NE

Notas

1. Entendidos estos como un tipo particular de números figurados bidimensionales "que se pueden representar como ensamble de un polígono regular básico preservando la forma" (Luque, Mora y Páez, 2013, p. 196); algunos de los números poligonales más conocidos son los triangulares, los cuadrados y los pentagonales.
2. La traducción al español que aquí se hace, es una adaptación de las palabras en latín *Stella octangula*, usadas por Kepler para este objeto matemático, y de las cuales solo hay traducción de la primera, que significa "estrella". Las palabras *octangulares* y *octángula* no existen en el idioma español, pero serán utilizadas a lo largo del documento, ya que son el núcleo del tema que se tratará aquí.
3. Se usa la palabra punto(s), no desde la geometría, sino refiriendo a cada una de las partículas de menor tamaño, de forma esférica, que sirven para construir un modelo tangible de la estrella de Kepler.
4. La propuesta se puede adaptar a diversos niveles de educación, atendiendo a la formación de los estudiantes en relación con este tipo de actividades y los fundamentos matemáticos con los que cuenten. Las tareas aquí formuladas se recomiendan para estudiantes de la educación media o superior (de los quince años en adelante).
5. Tarea formulada a partir de lo expuesto en *Number Universe* (s/f).
6. Esferas pequeñas e imantadas que se encuentran en varios colores y permiten la construcción de modelos de varios objetos físicos, entre ellos, las estrellas octángulas.
7. En esta etapa de descripción aparecen asuntos relacionados con la actividad de argumentar, sobre la cual se puede profundizar en Álvarez, et ál. (2014).
8. Al elegir este camino, se debe hallar una expresión general para la cantidad de puntos adicionales. A dicha expresión se le debe dar un tratamiento algebraico (poco evidente a primera vista) para que aporte de forma relevante a establecer la fórmula general que permite dar solución a la tarea planteada. Por lo que se considera un camino algo complejo y poco atractivo de abordar en un primer intento de resolver la tarea, mas sin embargo, dicho camino debe llevar al mismo modelo matemático que representa este tipo de números.
9. La expresión $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ representa los números piramidales de base cuadrada y es el modelo que representa la suma de los n primeros números naturales al cuadrado. Al sustituirlo en el enunciado $O_n = 2[1^2 + 2^2 \cdot \cdots + (n-1)^2] + n^2$ se obtendrá la expresión $\frac{(n-1)(2n-1)n+3n^2}{3}$ que llevará a la fórmula de los números octaédricos.
   Para profundizar en lo anterior se recomienda consultar Conway y Guy (1995), pp. 47-50.
10. Para profundizar en las actividades matemáticas y los procesos algebraicos inherentes a estos números poligonales, se recomienda consultar Luque, Mora y Páez (2013).
11. El desarrollo de una secuencia de tareas para determinar la expresión general de los números primos cubanos a través de las actividades matemáticas descritas en el presente documento se puede encontrar en Álvarez y Quintero (2011).
12. ¿Dada la expresión $Oct_n = n * (2n^2 - 1)$, qué figura, representación gráfica o cuerpo geométrico puede explicar lo que ella representa?

INFORMACIÓN ADICIONAL

Bibliografía

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J. (1991). *Materiales para construir la geometría.* Madrid: Síntesis.

Álvarez, I. y Quintero, D. (2013). *¿Los cubanos son primos? Números y actividades matemáticas.* En el VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática CIBEM, Montevideo, Uruguay, septiembre de 2013.

Álvarez, I., Ángel, L., Carranza, E. y Soler-Álvarez, N. (2014). "Actividades matemáticas: conjeturar y argumentar". *Revista Números*, nº 85, pp. 75-90, marzo de 2014. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros

Biembengut, M. y Hein, N. (s/f). *Modelos, modelación y modelaje: métodos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas.* Matemática Interactiva. Recuperado de http://matesup.utalca.cl/modelos/articulos/modelacion_mate2.pdf

Conway, J. y Guy, R. (1995). *The book of numbers.* New York: Copernicus.

Guillen, G. (1997). Poliedros. *Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Madrid: Síntesis.

Luque, C., Mora, L. y Páez J. (2013). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: contar e inducir.* 2a ed. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN]. (1998). *Lineamientos curriculares. Matemáticas.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN]. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas.* Bogotá.

Number Universe (s/f). *Stella octangula numbers.* NUC-7. Recuperado de http://www.numberuniverse.com/pdf/en/stella-octangula-number.pdf.

Ingrith Álvarez Alfonso. Licenciada en Matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Especialista en Educación Matemática. Magíster en Educación y magíster en Docencia de las Matemáticas. Profesora del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia e integrante del grupo de investigación en Didáctica de la Matemática, con intereses en la formación de profesores de matemáticas.
C.e.: ialvarez@pedagogica.edu.co

Diana Isabel Quintero Suica. Estudiante de licenciatura en Matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional de Colombia. Monitora de investigación, con producciones tipo como ponencia en evento académico y artículos en el ámbito de la enseñanza del álgebra, de la historia de las matemáticas como recurso didáctico y de la teoría de números.
C.e.: diana.isasui@gmail.com

ABRIL 2015 | N° 292

COLUMNA DE OPINIÓN

CULTURA MATEMÁTICA

DIVERSIDAD E INCLUSIÓN

FORMACIÓN DOCENTE

MISCELÁNEAS

NOVEDADES EDUCATIVAS
www.noveduc.com

00292
9 770328 350101