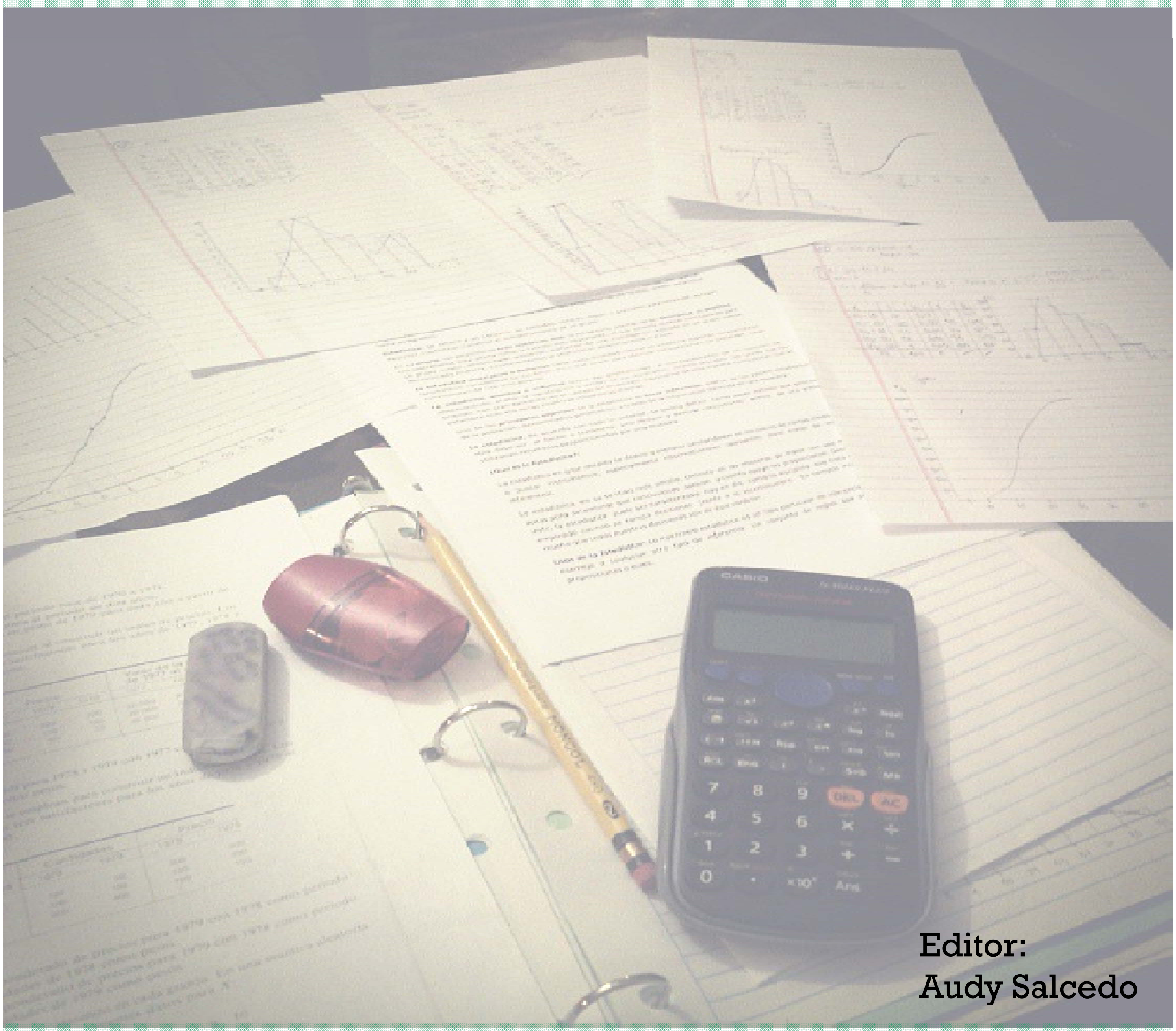
Educación Estadística en América Latina:
Tendencias y Perspectivas



Editor:
Audy Salcedo

CARACAS - 2013

Vicerrectorado Académico

PROGRAMA DE COOPERACIÓN INTERFACULTADES

INTERNATIONAL YEAR OF STATISTICS

Educación Estadística en América Latina

Tendencias y Perspectivas

Editor: Audy Salcedo

Comité Académico: Lisbeth K. Cordani
Cileda de Queiroz e Silva Coutinho
Santiago Inzunsa Cazares
Audy Salcedo (Coordinador)

Los artículos fueron seleccionados mediante sistema de arbitraje.

Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas.

Octubre 2013

ISBN: 978-980-00-2744-8

Depósito Legal: Ifi17520135102435

Diseño de Portada: Antonio Machado E.

Foto de portada: Vanessa I. Valdes V. (Estudiante Comunicación Social – UCV)
vanessavaldesv@hotmail.com

Diseño y diagramación: Audy Salcedo

Publicado por:
Programa de Cooperación Interfacultades
Vicerrectorado Académico
Universidad Central de Venezuela
Av. Carlos Raúl Villanueva Instituto de Investigaciones Económicas y Sociales Rodolfo Quintero, piso 1, Ofic. 203. UCV. Teléfonos: +58 212 605 – 2597
http://www.ucv.ve/portal-pci.html E-mail: pciucv@ucv.ve; pciucv@gmail.com

AUTORIDADES DE LA UNIVERSIDAD CENTRAL DE VENEZUELA

Dra. Cecilia García Arocha, Rectora

Dr. Nicolás Bianco C., Vicerrector Académico

Dr. Bernardo Méndez, Vicerrector Administrativo

Dr. Amalio Belmonte, Secretario

Índice

CAPÍTULO 4

LA BÚSQUEDA DEL ESPACIO MUESTRAL 'ORIGINAL': UNA NECESIDAD PARA LA ENSEÑANZA

LUISA ANDRADE

FELIPE FERNÁNDEZ

BENJAMÍN SARMIENTO

RESUMEN

En las fases sucesivas de un proyecto de investigación que apunta a la promoción de razonamiento estadístico en torno a la variable aleatoria, se detectan dificultades de los estudiantes en la conceptualización de nociones como 'experimento aleatorio' y 'espacio muestral', que llevan a una prolongada reflexión donde se pone de relieve la incidencia de la enseñanza en tales dificultades. Este artículo presenta dicha reflexión y la manera cómo evoluciona en una comprensión por parte del grupo de investigación, la cual además sugiere ideas para un aprendizaje interconectado y con sentido de los conceptos mencionados.

Palabras clave: *Palabra probabilidad; experimento aleatorio; espacio muestral; variable aleatoria.*

1. INTRODUCCIÓN

La variable aleatoria se posiciona como un concepto cuya perspectiva se ha transformado dentro de la educación estadística, y de verse como una magnitud, es decir, como un conjunto de valores numéricos diferentes que corresponden a resultados de una medición, ha pasado a establecerse como una relación funcional (ver por ejemplo: Miller (1998), Ortiz (2002), Ruiz (2006) y Ruiz, Albert y Batanero (2006)). El contexto de trabajo que dio origen a la idea de escribir este ensayo es el de un proyecto de investigación que se desarrolló durante los años 2010 y 2011 por parte de la Línea de investigación en Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, Colombia, con estudiantes de la Licenciatura en matemáticas de la misma universidad[1]. En dicha investigación se plantea una secuencia de enseñanza en torno a la comprensión de la variable aleatoria con el fin de asumir la nueva conceptualización, atendiendo a las dificultades iniciales de los estudiantes que surgen y que ponen de relieve la relevancia de los conceptos de 'espacio muestral' y 'experimento aleatorio' en la exploración de la variable aleatoria (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2012).

En la secuencia de enseñanza se proponen situaciones que involucran fenómenos aleatorios que dan lugar únicamente al tratamiento de espacios muestrales finitos. Alrededor de estas situaciones se

[1] Ese proyecto fue financiado por el Centro de Investigaciones (CIUP) y el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

En: A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas.* (pp. 81 – 98). Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela, 2013. ISBN: 978-980-00-2744-8.

plantean tareas que persiguen objetivos de aprendizaje concernientes a diferentes aspectos de la comprensión del concepto de variable aleatoria (ver Fernández, Andrade y Montañez, 2011). La situación que se trabaja en la mayoría de las tareas alude a la realización de la rifa de un viaje para la familia del ganador, lo que involucra estimar con anterioridad el número de personas del núcleo familiar y el lugar de destino preferido (ver Anexo 1), con el fin de comprar el paquete turístico previamente; otras tareas hacen referencia a juegos de azar y artículos defectuosos (ver Anexo 2). Se esperaba que los estudiantes pudieran distinguir las variables aleatorias implicadas al identificar el espacio muestral y las relaciones entre los puntos muestrales y los valores de dichas variables.

2. ERRORES Y DIFICULTADES DE LOS ESTUDIANTES

En el trabajo en torno a las tareas durante el desarrollo del proyecto, los estudiantes presentan errores tanto en la determinación de los experimentos aleatorios como en la explicitación de los espacios muestrales.

En la identificación del experimento aleatorio de la situación de la rifa se manifiestan dificultades que conducen a que los estudiantes lo determinen como alguno de los sucesos de la situación relacionado con los datos relevantes para responder la pregunta que se desea contestar, la cual usualmente solicita determinar una probabilidad. Por ejemplo, en la situación de la rifa (ver Anexo 1, Taller Variable aleatoria), algunos estudiantes señalan que el experimento aleatorio consiste en: "determinar cuáles son las posibilidades de escoger al empleado, la cantidad de familiares y la ciudad que desea conocer" o "determinar cuántos tiquetes de viaje y gastos de hotel a un destino hay que comprar antes de la rifa", es decir, las respuestas están dadas en términos de la información del enunciado que consideran importante para responder la pregunta. Pareciera que el origen de estas dificultades es el hecho de que la situación propuesta no sea habitual en la enseñanza y por lo tanto, de que una rifa no se ha establecido explícitamente como un fenómeno aleatorio que es plausible de trabajar matemáticamente. Quizás también por la definición de experimento aleatorio que pueden haber formado los estudiantes limitada a los ejercicios y tareas de los libros de texto que han trabajado, constituidas por un enunciado corto donde se describe la acción que genera los resultados aleatorios de manera concisa y se señala la observación que enfoca la atención, en contraste con la situación de la rifa que es rica en información, no es solo la descripción de una acción no determinista y para la cual la observación se especifica de manera indirecta. Si en el experimento de la rifa se explicitara qué es lo que se va a anotar, quizá se detectarían menos errores en las respuestas de los estudiantes.

Los estudiantes tienen problemas para establecer los espacios muestrales correspondientes a experimentos aleatorios, incluso tras identificar éstos adecuadamente. A pesar de que la situación de la rifa es reconocida por algunos estudiantes como el experimento aleatorio, el espacio muestral que registran es “un ganador y el resto perdedores” o “$S = \{G_1, P_1, P_2, ..., P_{119}\}$”. En estas respuestas de los estudiantes se percibe cómo de alguna manera intentan encajar el espacio muestral dentro de las características de los espacios muestrales que han trabajo con mayor énfasis, en particular, para situaciones cuyos valores se comportan de manera binomial. Es de anotar que se refleja una confusión, quizás motivada por la rifa como un suceso familiar de la vida cotidiana que no se ha trabajado matemáticamente y por el enunciado mismo de la situación, pues aunque el espacio muestral no está constituido por dos puntos muestrales hay evidentemente solo dos posibles resultados para un participante: ganar o perder. Otro ejemplo de respuesta que muestra esta tendencia se ve claramente en la siguiente situación: “Se selecciona al azar, un computador de la sala B-224 (que tiene 25 computadores) para verificar el funcionamiento de su sistema operacional”, donde los estudiantes reconocen el experimento aleatorio al señalar que “el experimento aleatorio es seleccionar al azar 1 de los 25 computadores de la sala B-224”, pero afirman que el espacio muestral es “S={funciona el sistema operacional (F), No funciona el sistema operacional (NF)}” (ver Anexo 2, Taller Espacio muestral). Hay una marcada tendencia a confundir la observación mediada por el propósito del experimento (observar el funcionamiento) con la observación de la acción aleatoria misma, y proponer espacios muestrales en términos de dos resultados como ‘si’ y ‘no’, ‘falso’ y ‘verdadero’, ‘0’ y ‘1’.

Varios de los estudiantes aún después de puntualizar los posibles resultados del experimento aleatorio, no reconocen el espacio muestral como el conjunto conformado por ellos, quizás porque a pesar de conocer la definición de espacio muestral, en las tareas que se abordan usualmente en la enseñanza, es decir, situaciones que corresponden a juegos de azar, como por ejemplo, lanzar dos dados y observar la suma de los puntos de las caras superiores y fabricaciones de artículos defectuosos, el espacio muestral se piensa ligado a la observación solicitada, es decir, en términos de la característica que interesa observar, más que a los resultados mismos del experimento aleatorio. Así, reflejan en el espacio muestral consideraciones del enunciado que muchas veces coinciden con los valores de las variables, ya sean variables aleatorias o no, o combinaciones de esos valores. En esto también puede incidir el hecho de que el enunciado que describe la situación involucra información adicional al fenómeno aleatorio mismo, que hace que consideren la necesidad de incluir en el espacio muestral tal información. Por ejemplo en la situación de la rifa, algunos estudiantes señalan como posibles resultados de ésta, cualquiera de los 120 empleados, pero al estipular el espacio muestral hablan de “Se motiva, No se motiva” [2], , o “los posibles resultados son ganar o perder”, o “$S = \{(E), (E,M), (E,M,H_1), (E,M,H_1,H_2), (E,M,H_1,H_2,\ldots,Hn)\}$” donde “E =Empleado, M=Esposa y H=Hijos”. De manera similar, otros errores en los que incurren los estudiantes al identificar el espacio muestral,

[2] Como se ve en el enunciado de la situación de la rifa, se indica que ésta se lleva a cabo para motivar a los empleados de una empresa. De ahí que algunos de los estudiantes tomen esta información como relevante para establecer el espacio muestral (ver Anexo 1, Taller Variable aleatoria).

parecieran estar ligados a la interpretación de la situación, la cual no siempre es fácil; así, reflejan en el espacio muestral consideraciones del enunciado que muchas veces coinciden con los valores de las variables, ya sean variables aleatorias o no, o combinaciones de esos valores. Es el caso de respuestas como "S = {1L, 1R, 1P, 2L, 2R, 2P, 3L, 3R, 3P,…, 22L, 22R, 22P}" en la situación de la rifa, donde el número hace referencia a la cantidad de familiares y la letra corresponde a la letra inicial de la ciudad de preferencia.

Cuando se solicita expresar el espacio muestral en notación formal de conjunto, los estudiantes aún después de reconocer los posibles resultados del experimento que han sido descritos de manera informal, presentan problemas tanto en la expresión por comprensión como por extensión; las siguientes respuestas ejemplifican esto: "S = {empleados}" o "S = Ganadores: Todos los empleados" o "S = {{CCC}, {SSS}, {CCS}, {CSC}, {SCC}, {CSS}, {SCS}, {SSC}}(ver Anexo 2, Taller Espacio muestral). Esta solicitud con respecto a la notación lleva en ocasiones a que los estudiantes busquen más bien el cardinal del espacio muestral como conjunto, es decir, el número de posibles resultados más no los resultados; por ejemplo en el caso de la rifa entre 120 empleados, algunos estudiantes responden "S $=\binom{120}{1}$". Concerniente al número de puntos muestrales del espacio muestral, hay igualmente indicios de la necesidad de emplear fórmulas, aunque a simple vista pueda establecerse esa cantidad, tal como se percibe en la siguiente respuesta para expresar el número de puntos muestrales en la situación de la rifa: "número de resultados = $\frac{120!}{1!119!}$".

Otras dificultades que se detectan en los estudiantes a través de los errores al explicitar los puntos muestrales del espacio muestral, tocan aspectos relativos a la formación de los puntos muestrales, como determinar si se trata de una permutación o una combinación y valorar si la repetición o no-repetición de elementos es relevante. Por ejemplo, en la situación de la rifa para algunos estudiantes el espacio muestral está compuesto por arreglos de 120 elementos "S = {GPPP…P, PGPP…P, PPGP…P,…}"; esta respuesta parece estar directamente vinculada al número de resultados que calculan con la fórmula, expuesto en el párrafo anterior, que tiene una alta influencia del trabajo en combinatoria que se realiza en los cursos de probabilidad. Similarmente en la situación "De un listado de 8 estudiantes del primer semestre de matemáticas de 2011-1 se eligen al azar 2 estudiantes para ayudar en la organización de la semana del educador matemático", los estudiantes reconocen el experimento aleatorio como "elegir dos estudiantes de una lista de ocho", y sin embargo, el espacio muestral que consideran es el listado de los ocho estudiantes, y no las posibles parejas que podrían ser seleccionadas. De nuevo aquí es relevante el hecho de que la situación es ajena a los experimentos aleatorios regularmente presentados en los libros de texto para los que los estudiantes conocen la configuración de los espacios muestrales respectivos; así los estudiantes asocian la situación desconocida con una ya trabajada como la de establecer el número de ordenaciones con elementos repetidos. Al respecto, en libros de texto se identifican inconsistencias al denotar, por ejemplo, en forma de parejas ordenadas configuraciones de elementos que corresponden a combinaciones donde el orden no es relevante (Wisniewski y Bali, 1998, p. 50).

La evidencia de estos errores y las posibles dificultades que los subyacen, llama fuertemente la atención pues pese a ellas, los estudiantes son capaces de emplear diagramas y fórmulas combinatorias para contar, y de esta manera calcular exitosamente probabilidades relacionadas con las situaciones. Por ejemplo en la situación "Se selecciona una bola de una urna, que contiene 3 bolas rojas, 4 verdes y 2 amarillas", los estudiantes calculan sin problema la probabilidad de que la bola seleccionada sea verde como "4/9" por conteo de posibilidades, pero al preguntar por el espacio muestral lo establecen como "S= {rojo, verde, amarillo}" que corresponde al conjunto de valores de la variable aleatoria y no tienen en cuenta el número de bolas de cada color, que las bolas son distinguibles; tampoco relacionan el conteo del total de bolas que hacen, con el número de puntos muestrales del espacio muestral.

3. DISCUSIÓN

Al estudiar con detenimiento las situaciones propuestas en los talleres de los experimentos de enseñanza, las respuestas de los estudiantes, los errores identificados y las posibles dificultades que los subyacen, la primera pregunta que surge es en torno a la noción de experimento aleatorio. Esta noción fuera de la acción misma que genera los resultados aleatorios incluye una acción implícita de observación de tales resultados que puede explicitarse o no. Por ejemplo, lanzar una moneda implica observar el resultado que sale, ya que esta es la razón por la cual se realiza el experimento de lanzar la moneda. Adicionalmente en algunos experimentos aleatorios se agrega otra observación en la que también está presente el azar -pues toma un valor particular en cada ejecución del experimento-, que indica el foco específico de atención sobre los resultados; en el caso del experimento aleatorio de lanzar la moneda podría señalarse que se anota 1 si sale sello y 0 si no. Mediante esta última acción se organizan los resultados posibles y se da lugar a la variable aleatoria.

También emergen preguntas acerca de cómo se constituyen los elementos llamados puntos muestrales que hacen parte del conjunto denominado espacio muestral, es decir, cuáles son realmente los resultados posibles asociados a un experimento aleatorio. La consulta de bibliografía conduce a notar que muchas veces los espacios muestrales finitos considerados en los libros de texto para las diferentes situaciones, corresponden a los conjuntos de valores que toman las posibles variables aleatorias o seudo aleatorias[3]. El hecho de que la definición formal para espacio muestral expuesta en

[3] Algunas de las variables involucradas en una situación ligada a un experimento aleatorio pueden tener características similares a una variable aleatoria en el sentido de que dan lugar a una partición del espacio muestral, y por lo tanto a una

libros de texto, que alude al conjunto de posibles resultados del experimento aleatorio, sea flexible y permita en algunos casos considerar como puntos muestrales los valores de las variables aleatorias, es decir, como los elementos del espacio muestral, motiva a que con frecuencia se admita la coexistencia de varios espacios muestrales en una misma situación y para el mismo experimento aleatorio. Se encuentran entonces referencias a que el espacio muestral de un experimento aleatorio no es único y así un experimento aleatorio puede constar de varios espacios muestrales (ver Larson, 1995; Wisniewski y Bali, 1998; y Montgomery y Runger, 2004). Se explica así la tendencia de los estudiantes a involucrar los valores de variables aleatorias en los espacios muestrales. Esta 'flexibilidad' puede reflejar un significado para experimento aleatorio diferente al establecido anteriormente pues incluiría la acción adicional que en algunos casos se añade para precisar la observación.

Se considera entonces conveniente hacer una distinción entre espacio muestral 'original' y espacio muestral 'adoptado'. El primero es el conjunto que resulta de explicitar directamente todos los posibles resultados del experimento aleatorio. El segundo es la colección de todos los eventos simples o elementales que interesa identificar en la realización del experimento según la observación puesta en juego, que se adopta como espacio muestral en concordancia con lo sugerido en libros de texto (ver Larson, 1995, p. 35). Algunos ejemplos de experimentos aleatorios sencillos, que surgen de considerar el lanzamiento de un dado, sirven para ilustrar la distinción planteada.

Experimento aleatorio 1. Se lanza un dado normal y se anota el número que resulta en la cara superior.

Experimento aleatorio 2. Se lanza un dado normal y se anota 'SI' si el número que resulta es divisible por 3, o se anota 'NO' si no es divisible por 3.

Experimento aleatorio 3. Se lanza un dado y se anota '1' si el número que resulta es divisible por 3 o se anota '0' si no es divisible por 3.

Claramente en el primer experimento aleatorio el espacio muestral es el conjunto $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y no hay ambigüedad respecto al posible espacio muestral 'adoptado'; ambos espacios muestrales, el 'original' y el 'adoptado', son el mismo. Sin embargo, cuando se pide determinar el espacio muestral asociado al segundo o tercer experimento aleatorio, la respuesta que suele encontrarse en textos de probabilidad es $S_2 = \{SI, NO\}$ y $S_3 = \{1, 0\}$ respectivamente. Entonces en el segundo experimento aleatorio, S_2 es el espacio muestral 'adoptado' mientras que el espacio muestral 'original' es S_1; y en el caso del tercer experimento aleatorio, la situación es similar, con la diferencia de que el espacio muestral 'adoptado' S_3, es un conjunto numérico.

relación funcional entre el espacio muestral y un conjunto, pero dado que éste no es numérico no se consideran variables aleatorias. Estas variables se han llamado en el proyecto, variables 'seudo aleatorias'.

La falta de distinción entre el espacio muestral y los conjuntos de valores de las variables aleatorias que se presenta en los libros de texto, es explicada por Ruiz (2006) para los experimentos aleatorios cuyos resultados son numéricos, quien señala que en esos casos "las variables aleatorias están ya implícitas en los puntos muestrales", es decir, los valores de una variable aleatoria hacen parte del espacio muestral, por ejemplo, si el experimento aleatorio consiste en observar el tiempo de espera a un autobús. En esta situación y como se vio en el ejemplo del primer experimento aleatorio expuesto antes, no hay confusión, ya que el espacio muestral y el conjunto de valores de la variable aleatoria son el mismo. Empero, en los libros de texto es usual que, independientemente de si los resultados del experimento aleatorio son numéricos o no, el espacio muestral indicado sea en realidad el espacio muestral que se ha denominado 'adoptado'. Por ejemplo, al lanzar tres monedas al aire el número de caras constituye una variable aleatoria, pero se encuentra que los valores de ésta se consideran como el espacio muestral S = {0, 1, 2, 3}, cuando en realidad el espacio muestral 'original' es S = {CCC, SSS, CCS, CSS, SCC, SSC, CSC, SCS}. Esto sucede igualmente en experimentos aleatorios en los cuales hay variables que no se consideran como variables aleatorias por no ser numéricas, es decir, en el caso de las que se han llamado aquí variables seudo aleatorias. Por ejemplo, en el lanzamiento de un dado de seis caras para determinar si el número que sale es par o impar, estos valores comúnmente se toman como el espacio muestral S_4 = {par, impar}, que en realidad es el espacio muestral 'adoptado' pues el espacio muestral 'original' es S_5 = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. En suma, es frecuente encontrar en los libros de texto, que la pregunta central de la situación que se quiere responder, sea el factor que determina el espacio muestral (ver Wisniewski y Bali, 1998, p. 41), y en consecuencia la identificación del espacio muestral dependa de aquélla. Algunos autores sustentan esta selección a conveniencia del espacio muestral, cuando argumentan que el espacio muestral apropiado "depende del problema que se tenga en mano" (Freund y Walpole, 1990, p. 29).

Siguiendo el análisis en esta dirección, es fácil percibir que en ocasiones el proceso de cálculo de las probabilidades ayuda a ocultar la importancia de distinguir entre espacio muestral, el que se ha llamado 'original', y el conjunto de valores de una variable aleatoria, el denominado espacio muestral 'adoptado', pues la misma probabilidad puede obtenerse a partir de cualquiera de los dos conjuntos, y por lo tanto es suficiente aludir a uno, generalmente el espacio muestral 'adoptado', sin necesidad de indicar el otro. Un caso típico es el anterior ejemplo del lanzamiento de un dado para determinar si sale un número par o impar, donde partiendo de cualquiera de los dos espacios muestrales, 'original', S_5, o 'adoptado', S_4, la probabilidad de que el número que sale sea par o impar es $^1/_2$ pues hay tres caras con números pares y tres caras con números impares. Se encuentra así que la falta de referencia al espacio muestral 'original' de los libros de texto está relacionada con el tipo de situaciones que se abordan, en las cuales es común que la probabilidad de un evento se pueda calcular con base en el espacio muestral ‘adoptado’ bien sea por conteo o mediante el uso de una fórmula preestablecida y conocida. Esto implica que en las situaciones que se presentan con frecuencia en los libros de texto y en la práctica educativa, en donde es razonable asumir la condición de equiprobabilidad para espacios muestrales ‘originales’ finitos, éstos no se consideren a la hora del cálculo de las probabilidades y por el contrario, se enfatice la relevancia de distinguir las situaciones donde el espacio muestral’ es equiprobable y donde no lo es, claro aludiendo tácitamente unas veces al espacio muestral ‘original’ y otras al espacio muestral ‘adoptado’.

Se ve entonces la conveniencia de trabajar situaciones que motiven determinar el espacio muestral ‘original’ para el cálculo de probabilidades. Por ejemplo, el experimento aleatorio que ocurre al girar una ruleta de siete dígitos, del 1 a 7, donde el espacio muestral ‘original’ $S_6 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ es equiprobable, mientras que el espacio muestral ‘adoptado’ $S_7 = \{PAR, IMPAR\}$ no es equiprobable, dado que hay tres números pares y cuatro números impares. Aquí entonces calcular la probabilidad de que el número que sale sea impar, no puede hacerse a partir del espacio muestral ‘adoptado’, sino que es necesario recurrir al espacio muestral ‘original’. Otro ejemplo, enmarcado en escenarios de experimentos binomiales, que también podría abordarse desde el espacio muestral finito ‘original’ equiprobable para el cálculo de probabilidades y que regularmente es tratado en libros de texto solo desde el modelo probabilístico, es el siguiente.

Experimento aleatorio 4. Un estudiante contesta al azar *n* preguntas de un examen, y se anota la opción que elige como respuesta. Cada pregunta tiene *k* opciones de respuesta, pero solo una opción es la respuesta correcta.

Para empezar, suponga que n = 2 y k = 2. Esto significa que se trata de un examen de dos preguntas cada una de las cuales solo tiene dos opciones de respuesta A o B. Al considerar este experimento binomial, el hecho de n = 2 indica que el experimento se repite dos veces, y es claro entonces para los estudiantes que la variable aleatoria asociada tomaría los valores X = 0, 1, 2, la cual corresponde al número de aciertos del estudiante al contestar el examen de dos preguntas. Las probabilidades calculadas a través de las fórmulas del modelo binomial serían $Pr(X=0) = {}^1/_4$, $Pr(X=1) = {}^1/_2$ y $Pr(X=2) = {}^1/_4$. Es usual que también en la enseñanza, se aluda a un diagrama de árbol que ilustre los puntos muestrales o eventos simples que se originan en cada rama, y que permiten el cálculo de las probabilidades fundamentado en la probabilidad de éxito de la prueba de Bernoulli, en este caso ${}^1/_2$, igual a la probabilidad del fracaso; en este diagrama de árbol se muestra entonces el espacio muestral denominado ‘adoptado’, sin que sea expresado con notación de conjunto.

Las preguntas relativas a este experimento se pueden trabajar con base en el espacio muestral ‘adoptado’ $S_A = \{EE, EF, FE, FF\}$ asociado a los posibles éxitos (E) y fracasos (F), el cual es equiprobable y así calcular las probabilidades $Pr(X=0) = Pr(\{FF\}) = {}^1/_4$, $Pr(X=1) = Pr(\{EF, FE\}) =$

$^1/_4 + ^1/_4 = ^1/_2$ y Pr(X=2) = Pr({EE}) = $^1/_4$. También tales preguntas se podrían abordar a partir del espacio muestral 'original', construido a partir de la siguiente tabla:

Pregunta	Opciones de respuesta	
1	A	B
2	A	B

Todas las posibles respuestas del estudiante conforman el espacio muestral 'original' S_B = {AA, AB, BA, BB} que también es equiprobable, de manera que si por ejemplo la respuesta correcta es el evento {BA}, entonces Pr({BA}) = $^1/_4$, y lo mismo vale para el resto de puntos muestrales; además, nótese que se puede establecer una correspondencia uno a uno entre cada elemento del espacio muestral original y un elemento del espacio muestral adoptado. Se concluye entonces que los dos espacios muestrales, el 'adoptado' y el 'original' S, son equivalentes y equiprobables.

Cuando n = 2 y k = 3, la variable aleatoria asociada toma los mismos valores, X = 0, 1, 2. Empero, dado que ahora hay tres posibles respuestas para cada pregunta, la probabilidad de éxito de la prueba de Bernoulli es entonces $^1/_3$ y la probabilidad del fracaso es $^2/_3$; al aplicar el modelo Binomial se obtienen las probabilidades Pr(X=0) = $^4/_9$, Pr(X=1) = $^4/_9$ y Pr(X=2) = $^1/_9$. Por otro lado, es fácil ver que el espacio muestral 'adoptado' sigue siendo el mismo que el del caso anterior S_A = {EE, EF, FE, FF}; no obstante es posible notar que éste no es equiprobable, pues por ejemplo, Pr({EE}) = $^1/_3{*}^1/_3 = ^1/_9$ y Pr({EF}) = $^1/_3{*}^2/_3 = ^2/_9$. Para buscar el espacio muestral 'original' se puede argumentar de manera similar al caso anterior:

Pregunta	Opciones de respuesta		
1	A	B	C
2	A	B	C

Entonces las posibles respuestas del estudiante, configuran el espacio muestral 'original' S = {AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC}, para el cual es razonable asumir el supuesto de equiprobabilidad y además aclara, sin necesidad de recurrir a cálculos basados en el modelo Binomial, las asignaciones de probabilidad; por ejemplo, si la respuesta correcta es BA, entonces Pr(X=0) = Pr({AB, AC, CB, CC}) = $^4/_9$. Pr (X=1) = Pr({AA, BB, CA, BC}) = $^4/_9$ y Pr(X=2) = Pr({AB}) = $^1/_9$.

Supongamos ahora que n = 5 y k = 3. En estas condiciones el proceso de responder al azar una pregunta del examen se identifica con un experimento aleatorio Binomial de cinco ensayos, en el que la probabilidad de acertar o tener éxito es $^1/_3$ y la probabilidad de no acertar o fracasar es $^2/_3$ en cada prueba de Bernoulli. Al calcular las probabilidades para estos valores utilizando el modelo Binomial resulta la Tabla 1.

Tabla 1.Modelo Binomial para el caso n = 5 y k = 3

Cantidad de Aciertos	**Eventos X=x**	**P(X=x)**	**P(X=x)**
0	X=0	$^{32}/_{243}$	0.1316872427
1	X=1	$^{80}/_{243}$	0.3292181069
2	X=2	$^{80}/_{243}$	0.3292181069
3	X=3	$^{40}/_{243}$	0.1646090534
4	X=4	$^{10}/_{243}$	0.0411522633
5	X=5	$^{1}/_{243}$	0.0041152263

Se ve que el espacio muestral 'adoptado', en este caso compuesto por 32 puntos muestrales correspondientes a arreglos de las posibilidades de acertar (E) o no acertar (F) a las 5 preguntas, S_A = {EEEEE, EEEEF, EEEFE, EEFEE, EFEEE, FEEEE, EEEFF, EEFEF, …, FFFFF}, no satisface las condiciones de equiprobabilidad; esto se comprueba al calcular la probabilidad, por ejemplo, Pr({EEEEE}) $= {}^{1}/_{3}*{}^{1}/_{3}*{}^{1}/_{3}*{}^{1}/_{3}*{}^{1}/_{3} = {}^{1}/_{243}$ mientras que Pr({EEEEF}) $= {}^{1}/_{3}*{}^{1}/_{3}*{}^{1}/_{3}*{}^{1}/_{3}*{}^{2}/_{3} = {}^{2}/_{243}$. Emplear el espacio muestral 'adoptado' podría llevar a asignaciones de probabilidad incorrectas, como por ejemplo calcular la probabilidad de cinco aciertos como $^{1}/_{32}$.

Sin embargo, la construcción del espacio muestral 'original' que es equiprobable, permite establecer los tamaños del evento y del mismo espacio muestral, con el fin de calcular la probabilidad de los eventos. Como se ha hecho antes, en este experimento los posibles resultados o puntos muestrales son las diferentes formas como se puede contestar el examen, entonces los puntos muestrales serán arreglos de 5 componentes, en donde cada componente es una de las letras A, B y C.

Pregunta	Opciones de respuesta		
1	A	B	C
2	A	B	C
3	A	B	C
4	A	B	C
5	A	B	C

Ejemplos de estos puntos muestrales serían AACBC y CCBBA. Si suponemos que la solución correcta del examen es 1) A, 2) B, 3) C, 4) B y 5) A, en el punto muestral AACBC hay tres aciertos, y en el punto CCBBA hay un acierto. Como la variable aleatoria es el número de aciertos al contestar el examen, toma valores de 0 a 5 y por lo tanto para cualquier punto muestral la cantidad de aciertos posibles varía entre estos valores. En consecuencia, si se genera una partición del espacio muestral $P_S = \{A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, donde A_k es el conjunto que contiene todos los puntos muestrales con k aciertos, y se hacen los respectivos conteos combinatorios de cada caso[4], se puede construir la Tabla 2, donde se representa esta partición y la cantidad de puntos muestrales en cada subconjunto A_k.

Tabla 2. Probabilidades asociadas a las particiones A_k

Eventos A_k	**Cantidad de aciertos (X)**	**Cantidad de puntos muestrales**	**Probabilidad de A_k**
A_0	0	32	0.1316872427
A_1	1	80	0.3292181069
A_2	2	80	0.3292181069
A_3	3	40	0.1646090534
A_4	4	10	0.0411522633
A_5	5	1	0.0041152263
	TOTAL	243	1.00

Dado que cada posible forma de contestar el examen, o punto muestral, tiene la misma posibilidad (probabilidad) de resultar, el espacio muestral 'original' es equiprobable. Por lo tanto, la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los eventos A_k es proporcional a la cantidad de puntos que contiene, y es consonante con los valores mostrados en la Tabla 1.

Cabe anotar que como se ha señalado previamente en la reflexión, las anteriores consideraciones se refieren solamente a las situaciones donde los posibles resultados del experimento aleatorio son finitos, y no necesariamente son válidas para el caso de experimentos aleatorios infinitos.

[4] Por ejemplo, para tener 0 aciertos las posibilidades de respuesta a cada pregunta son 2, por lo tanto habría $2^5 = 32$ posibilidades, para A_0, para tener sólo un acierto, si la respuesta acertada fuera la primera, habría $2^4 = 16$ posibilidades para el resto de preguntas, pero como se puede responder bien a cualquiera de las 5 preguntas, las posibilidades en total para responder bien a una pregunta serían de 16x5 = 80. Por lo tanto A_1 tiene 80 elementos. Para el resto de casos las argumentaciones son similares.

4. CONCLUSIONES

La discusión en torno al análisis de las dificultades que subyacen a los errores en que incurren los estudiantes, pone de relieve, en primer lugar, la necesidad de trabajar en probabilidad diversas situaciones que se refieran a experimentos aleatorios no sólo relativos a juegos de azar y artículos defectuosos, sino que atiendan a otros fenómenos aleatorios de la vida cotidiana, de manera tal que los estudiantes amplíen el repertorio de situaciones ligadas con la aleatoriedad. Son indispensables también situaciones que sean ricas en información donde los estudiantes puedan reconocer el experimento aleatorio independientemente de otros sucesos que aparezcan en el enunciado, incluso cuando estos sucesos son relevantes para dar solución a las preguntas planteadas. En el caso de este proyecto, dadas las dificultades iniciales de los estudiantes, una estrategia que se consideró para contribuir a la identificación del experimento aleatorio fue dividir el enunciado de la situación de la rifa en dos partes, para así aislar el experimento aleatorio de otra información.

Como se vio, aunque muchas veces los estudiantes son capaces de seleccionar la fórmula o modelo probabilístico pertinente a la situación, por ejemplo el modelo binomial, y pueden usarlo adecuadamente para obtener la probabilidad solicitada, no siempre comprenden por qué la fórmula es así o de dónde proviene; trabajar las situaciones se convierte entonces en un ejercicio de memorización y reemplazo de fórmulas. Así, abordar el cálculo de probabilidades a partir del espacio muestral que se ha denominado 'original', para las situaciones donde el número de posibles resultados es finito y moderado, y donde los puntos muestrales se pueden establecer, no solo facilita la asignación de probabilidades sino contribuye a la comprensión de los estudiantes relativa a dichas probabilidades. Al determinar el espacio muestral 'original', los estudiantes pueden notar el papel del espacio muestral en dicho cálculo, por ser equiprobable y porque es posible comprobar por una lado, si la probabilidad calculada es correcta y por otro lado, entender por qué esos son los números que intervienen en el cálculo.

El foco de la enseñanza en contestar preguntas de probabilidad cuyo cálculo se facilita empleando fórmulas que sintetizan los procesos, y el tratamiento del espacio muestral que con frecuencia evita la alusión y explicitación del espacio muestral 'original', explica así mismo la manera en que se trabaja la variable aleatoria con los estudiantes, sin enfatizar su significado como una relación funcional -cuyo dominio es precisamente el espacio muestral-, sin explicitar las particiones del espacio muestral generadas por las variables aleatorias, y donde la variable aleatoria es simplemente el conjunto de valores del recorrido de la relación funcional. En la confusión de los estudiantes también puede incidir el nombre de 'variable aleatoria' pues tal y como lo señala Goldberg (1974), "Llamar variable aleatoria a una función de valores numéricos definida respecto a un espacio muestral es singularmente inadecuado […] las variable aleatorias, ni son variables… ni son aleatorias"; en esta expresión variable se interpreta desde una perspectiva clásica del álgebra, como una colección de distintos valores asociados a una medición. Vale la pena destacar que en los libros de texto cuando se alude a variables aleatorias con nombre propio como la binomial, la hipergeométrica, etc., también se está apuntando básicamente al recorrido de la variable aleatoria o dominio de la relación funcional que constituye la función de distribución de probabilidades.

Explicitar la distinción entre el espacio muestral 'original' y los espacios muestrales 'adoptados', también ayuda a dotar de significado a la variable aleatoria. En situaciones donde el espacio muestral 'original' tiene un tamaño moderado (de no más de 40 elementos, por poner una cota), hacer esta diferencia ilustra la generación de agrupaciones ligadas a la construcción de particiones del espacio muestral, y establece de manera natural la correspondencia entre los subconjuntos de la partición y los valores de la observación puesta en juego, ideas que hacen parte inherente de la comprensión de la variable aleatoria desde su perspectiva funcional. Igualmente el trabajo con la seudo variable aleatoria en la enseñanza contribuye a consolidar la idea de variable aleatoria dado que también involucra también una partición del espacio muestral y una relación funcional entre el espacio muestral 'original' y un espacio muestral 'adoptado' no numérico.

Sin embargo, es claro que cuando en situaciones como el ejemplo del experimento aleatorio 4 con $n = 5$ y $k = 3$, planteado en la discusión anterior, el espacio muestral 'original' es de tamaño no moderado, por lo tanto su consideración puede parecer caprichosa y poco eficiente desde lo didáctico dado que el desarrollo de los procesos de recuento para su establecimiento exige una mayor habilidad combinatoria. Se ve entonces que tiene sentido robustecer la búsqueda del espacio muestral 'original' y la distinción explícita con el espacio muestral 'adoptado', al iniciar la enseñanza y el aprendizaje de la probabilidad y en especial de la variable aleatoria, de manera que desde el comienzo el estudiante trabaje de manera comprensiva.

De la discusión planteada surgen otras ideas para la enseñanza como la de contemplar posibles modificaciones en el currículo de la licenciatura en matemáticas respecto al tratamiento, secuenciación y énfasis dados al tratar temas particulares de estadística y probabilidad. En el curso de estadística por ejemplo, la idea de 'población objetivo y población de datos' se ve como similar en el curso de probabilidad, a la idea de espacio muestral 'original' y espacio muestral 'adoptado'. Así pues, si la población objetivo configura el conjunto de unidades muestrales que determinan un marco de muestreo, una población de datos deviene de la medición de alguna característica y es consonante con la observación adoptada para determinar un valor que se asigna a cada unidad muestral, en el mismo sentido funcional que define a la variable aleatoria o seudo aleatoria. Además, esta similitud conceptual sugiere la posibilidad de considerar tareas para promover el desarrollo de pensamiento combinatorio, no sólo en escenarios de situaciones de probabilidad dirigidas, por ejemplo, a la asignación de probabilidades en el sentido clásico de Laplace, sino a extenderlas o anticiparlas a escenarios de situaciones de conjuntos de datos en donde se trabaje con la asignación de frecuencias relativas asociadas a poblaciones de datos que requieran de la búsqueda o la concreción de una población objetivo, por medio de recuentos combinatorios.

REFERENCIAS

Fernández, F. Andrade, L. y Sarmiento, B. (2012).Variación y diseño de experimentos de enseñanza para la educación estadística (reporte de investigación). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional

Fernández, F., Andrade, L. y Montañez, J. (2011). Hacia una posible aproximación comprensiva de la variable aleatoria. *XIII CIAEM-IACME, Recife: Brasil*

Freund, J.E. y Walpole, R. (1990). *Estadística Matemática con aplicaciones*. México, D.F.: Prentice–Hall Hispanoamericana, S.A.

Goldberg, S. (1974). *Cálculo de probabilidades*. Bilbao: Ediciones Urmo S.A.

Larson, H. (1995). Introducción a la teoría de probabilidades e inferencia estadística.

Miller, T.K. (1998). The random variable concept in introductory statistics. In L. Pereira- Mendoza (Ed.). Proceedings of the Fifth International Conference on Teaching Statistics. (pp. 1221-1222). Singapore: IASE.

Montgomery, D. y Runger, G. (2004) Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería. México, D.F.: Limusa Wiley.

Ortiz, J. (2002) La probabilidad en los libros de texto. (Tesis doctoral). España: Grupo de Educación Estadística de la Universidad de Granada.

Ruiz, B. (2006). Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria (Tesis de maestría). México: Instituto Politécnico Nacional.

Ruiz, B., Albert, J. y Batanero, C. (2006). An exploratory study of students' difficulties with random variables. México: ICOTS 7.

Wisniewski, P. y Bali, G. (1998). *Ejercicios y problemas de Teoría de las probabilidades*. México D.F.: Editorial Trillas.