

Septiembre de 2009
Duitama

Memorias VIII Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística

CONFERENCIA

LA IDEA DE VARIACIÓN EN LA EDUCACIÓN ESTADÍSTICA

Felipe Fernández
Luisa Andrade
Benjamin Sarmiento

Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá - Colombia
fjfernandez@pedagogica.edu.co
landrade@pedagogica.edu.co
bsarmiento@pedagogica.edu.co

Resumen

En esta ponencia se aborda el tema de la variación desde lo estocástico al comentar diferentes elementos que se pueden tener en cuenta para la planificación de la educación estadística. En particular, se identifica la idea variación como componente fundamental de la educación y la práctica de la estadística, se destaca la necesidad de enfocar la enseñanza y aprendizaje de la estadística con base en esta idea; se caracteriza la idea de variación como una entidad conceptual compleja que tiene en cuenta mucho más que simplemente la idea de dispersión; y se sugieren tres escenarios de trabajo en los que se pueden plantear proyectos pedagógicos de investigación en torno al diseño y desarrollo curricular de la instrucción estocástica.

Palabras clave: variación estocástica, educación estadística.

Abstract

This paper deals with the topic of variation from the stochastic perspective by considering different elements that can be take on account for the planning of statistics education. In particular, the idea of variation is identified as a fundamental component of the education and practice of statistics, and the need to focus teaching and learning of statistics on this idea, is stressed; variation it is characterized as a complex conceptual entity which accounts for much more than just the idea of dispersion; three working scenarios are suggested which may arise pedagogical research projects on curriculum design and development of stochastic teaching.

Key words: stochastic variation, statistics education.

INTRODUCCIÓN

En las disposiciones curriculares para la educación básica y media sugeridas para Colombia, la variación se posiciona como un constructo relevante asociado al llamado “pensamiento variacional” (ver por ejemplo, MEN, 1998 y 2000). Sin embargo, la variación también ocupa un lugar importante como parte de las ideas que caracterizan al “pensamiento estocástico”. A pesar de ello, la idea de variación, desde lo que se presenta en documentos como los del Ministerio de Educación Nacional citados antes, es muy exigua en su referencia a lo estocástico.

Una mirada a estos documentos permite evidenciar que la variación se enmarca por una parte, en la matemática que estudia la noción de cambio en términos de una covariación o como una variación relacionada o concomitante entre un par de variables, perspectiva coherente con aproximaciones al estudio de concepto de derivada y fundamental en el estudio del cálculo infinitesimal; y por otra parte, en el

estudio y tratamiento de contextos algebraicos en donde cobra especial interés las diversas interpretaciones que se pueden dar a la idea de variable. A pesar de que en los lineamientos curriculares se dedique un espacio importante para hablar de lo aleatorio y de los sistemas de datos, la consideración de la variación desde lo estocástico es muy exigua. Sin embargo, la idea de variación, en lo que atañe a lo estocástico, se debería posicionar de manera más relevante como parte de las ideas que se pongan en discusión respecto a los enfoques curriculares, tanto a nivel escolar como universitario.

Si bien es cierto que en el contexto colombiano se han realizado algunos trabajos respecto al tratamiento y consideración de la variación para el diseño curricular (ver por ejemplo, Vasco (2003) y Guacaneme, Andrade, Perry y Fernández (2003)), en estos trabajos el foco de atención en la variación no ha sido lo estocástico. En este trabajo queremos presentar algunas de las ideas, sobre el tema de la variación desde lo estocástico, que ha consolidado el Grupo de investigación en Educación Estadística de la Universidad Pedagógica Nacional en el marco del desarrollo del proyecto *Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico en estudiantes de secundaria*¹.

LA VARIACIÓN EN LA EDUCACIÓN Y LA PRÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA

Entre los primeros trabajos que posicionan de manera relevante la idea de variación tanto para la educación estadística como para la práctica profesional del estadístico, están los de Pfannkuch (1997) y Wild y Pfannkuch (1999), quienes consideran que la variación es una parte central de las definiciones del pensamiento estocástico. Hay diversos argumentos que justifican este hecho y algunos de ellos se exponen a continuación.

En primer lugar, es indudable que la recolección adecuada de datos y los juicios correctos a partir de los mismos, requieren de la comprensión de la variación que hay presente, y que se transmite a través de los datos, así como de la incertidumbre originada por la variación no explicada. La estadística en tanto disciplina académica, se concibe como una ciencia predominantemente aplicada que permite hacer predicciones y buscar explicaciones y causas de la variación que hay presente en diferentes contextos. Para Wild y Pfannkuch (1999, p. 7) la variación se mide ni modela en un vacío, sino que el propósito influye en la manera en que se hace.

La importancia acerca de la variación también la enfatiza Moore (1997) en la lista de aspectos relevantes en torno al pensamiento estadístico que presentó al consejo de la Asociación Estadística Americana (ASA). Entre ellos se consideran: la omnipresencia de la variación en los procesos, la necesidad de datos sobre los procesos, el diseño de producción de datos con la variación en mente, la cuantificación de la variación, y la explicación de la variación. La idea de variabilidad presente en todas partes cobra sentido cuando miramos el mundo en que vivimos, en éste es incuestionable que hay un componente de variación aleatoria.

En segundo lugar, Pfannkuch (1997) afirma que los estadísticos profesionales en sus trabajos han visto la centralidad de la variación y han desarrollado modelos de pensamiento estadístico donde la variación es el elemento central, pues el pensamiento estadístico involucra notar, entender, evaluar críticamente y distinguir los diferentes tipos de variación. Así mismo, Shaughnessy y Ciancetta (2001) dicen que hay un consenso generalizado en cuanto a que “la variación es el fundamento del pensamiento estadístico, la razón más profunda de la existencia de la disciplina”.

En la práctica profesional del estadístico, el planteamiento de modelos estadísticos es una de las tareas fundamentales que se debe enfrentar. La formulación de modelos se basa en la búsqueda de fuentes

¹. Este proyecto tiene asignado el código DMA-081-08 y ha sido financiado por Centro de Investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional (CIUP).

de variabilidad, y se explicita en términos de la identificación de patrones y relaciones entre variables. Si en la identificación de estos modelos no se encuentran regularidades, la opción que queda es estimar la magnitud de la variabilidad y trabajar alrededor de ella. Por otra parte, cuando se logra la identificación de regularidades, no siempre se las puede explicar en términos causales.

Respecto a la variación es relevante explicitar la distinción que se hace entre: variación “explicada” y variación “no explicada”, o en términos de Wild y Pfannkuch (1999), entre “señal” o variación de “causa especial” y “ruido” o variación de “causa común”. Así, mientras que la variación explicada, se concreta o caracteriza con base en los patrones o regularidades identificadas, la variación no explicada corresponde a lo que se obtiene, cuando se ha separado de los datos, los patrones identificados. Para los estadísticos esta caracterización se puede expresar de manera similar en términos de la conocida expresión “modelo = datos + error”. Sin embargo, bien sea que nos refiramos al error, al ruido, a la variación de causa común o simplemente a la variación no explicada, Wild y Pfannkuch advierten sobre la complejidad subyacente a muchos de los fenómenos de estudio que se pretenden modelar y dicen:

No tenemos idea si esta variación es realmente aleatoria; esto no es algo que nos moleste. Si el muestreo aleatorio ha ocurrido realmente, hay un elemento de aleatoriedad en el ruido. Sin embargo, el error en la medición y las componentes de la variación en el proceso original contribuyen típicamente a la variación inexplicada y no hay manera de saber si éstas se comportan o no aleatoriamente. De hecho, la aleatoriedad es sólo un conjunto de ideas, un modelo abstracto, una invención humana que usamos para modelar la variación en la que no vemos patrón. (p. 24)

En síntesis, las conclusiones a las que llegan Wild y Pfannkuch, al referirse a la construcción de la comprensión de la variación subyacente a un conjunto de datos son: la variación es una realidad claramente visible; hay un tipo de variación que puede ser explicada, pero hay otra variación que no se puede explicar con base en el conocimiento común; la variación no explicada es precisamente la que los estadísticos, al construir modelos, suelen llamar como variación aleatoria y, en alguna medida o en su totalidad, se puede atribuir al proceso de muestreo; la aleatoriedad es una provechosa construcción humana usada para tratar con la variación en la que no se pueden identificar patrones.

Rubin y otros (1991) enfatizan por su parte, el papel esencial que juega la variación en el pensamiento estadístico, al sugerir que el razonamiento estadístico surge de dos nociones, que cuando se miran desde un marco determinista, parecen opuestas: la noción de muestra representativa y la noción de variabilidad muestral. Mientras que la primera se refiere a la idea de que una muestra tomada de una población, usualmente tiene características similares a la de la población de la que se toma, la segunda destaca la idea de que las muestras tomadas de una población no son todas iguales y por lo tanto no todas son similares a la población de donde provienen. Además, agregan que “para comprender el propósito que hay detrás de la inferencia estadística, uno tiene que balancear estas dos ideas y notar que una muestra da alguna información acerca de la población, no nada, ni todo, pero si alguna información” (Rubin y otros, 1991, p. 2). Y en el mismo orden de ideas, Melituo (2000, p. 69) señala que “debido a la representatividad muestral, podemos acotar el valor de una característica poblacional, sin embargo, debido a la variabilidad muestral nunca sabemos exactamente cual es el valor de la característica”. En suma, en el balance de estas dos ideas está el corazón de la inferencia estadística.

ENSEÑANZA ENFOCADA EN LA VARIACIÓN

Pfannkuch (1997), basado en resultados de entrevistas en profundidad realizadas tanto a profesionales como a educadores estadísticos, propone una triada epistemológica que plantea el desarrollo de la comprensión de la variación como el núcleo de un modelo de instrucción para la introducción de la

estadística (ver Figura 1.1). Bajo esta postura se propone que una combinación de conocimiento estadístico y de conocimiento acerca del contexto es esencial para la conceptualización de la variación. Además, esta interrelación sugiere que hay una fuerte conexión entre el uso de las herramientas estadísticas y el contexto de los problemas desde donde surgen o se motivan y justifican sus posibles aplicaciones. Se sostiene entonces, que el énfasis de la interrelación entre los datos, incluyendo los contextos subyacentes a los mismos, y la teoría, es fundamental, dado que el principal propósito de las herramientas estadísticas (como los gráficos y las estadísticas de resumen) es ayudar en la comprensión y predicción acerca de fenómenos del mundo real a través de la utilización de modelos.

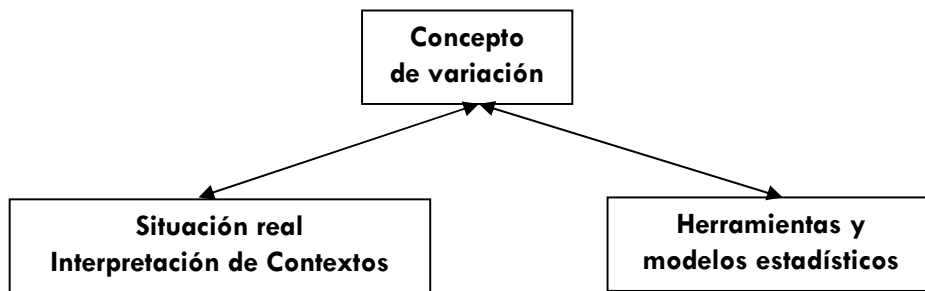


Figura 1.1. Triada epistemológica para el desarrollo de la comprensión de la variación sugerida por Pfannkuch (1997).

A manera de ejemplo, una propuesta específica que se encuentra consonante con este enfoque en la variación es la de la Educación Matemática Realista (EMR), derivada de anteriores proyectos de educación matemática y en particular del Proyecto Wiskobas. Al respecto Treffers (1987, citado en Bakker), expone cinco principios para la práctica de una EMR:

1. *Exploración fenomenológica.* Se debe explorar la riqueza y significación de contextos y fenómenos concretos o abstractos, para desarrollar nociones intuitivas que puedan servir como base para la formación de conceptos.
2. *Matematización progresiva del uso de modelos y símbolos.* Se debe procurar el desarrollo de un proceso gradual y progresivo que parta del desarrollo de nociones intuitivas e informales ligadas a contextos y se encamine hacia una formulación matemática más formal. Este proceso se puede apoyar en una variedad de modelos, esquemas, diagramas y símbolos, ya que la provisión de estos instrumentos es significativa para que los estudiantes tengan el potencial para la generalización y abstracción.
3. *Utilización de las construcciones y producciones propias de los estudiantes.* Se asume que lo que los estudiantes hacen por sí mismos es significativo para ellos. Por ello, la utilización de las construcciones y producciones de los estudiantes es promovida como una parte esencial de la instrucción.
4. *Interactividad.* Entonces, las contribuciones propias de los estudiantes se pueden utilizar para comparar y reflexionar sobre los méritos de los diferentes modelos o símbolos. Los estudiantes pueden aprender de sus compañeros en discusiones de grupos pequeños o de toda la clase.
5. *Interrelación.* Es importante la consideración de la relación de una secuencia de instrucción con otros dominios. Cuando hacemos estadística, ¿cuál es el conocimiento algebraico o científico que necesitan los estudiantes? Y dentro de un dominio, si proponemos la comprensión del concepto de distribución, ¿qué

otros conceptos estadísticos están relacionados con éste? La educación matemática debe llevar a la utilización de un conocimiento integrado. Esto significa, por ejemplo, que la teoría y sus aplicaciones no son enseñadas separadamente, sino que la teoría surge de la resolución de problemas.

LA VARIACIÓN COMO UNA ENTIDAD CONCEPTUAL

La variación implica diversidad y se refiere a un distanciamiento de una clase o cantidad normal, de un estándar. Una forma de medir la variación en un conjunto numérico de datos es el rango, el cual suministra la dispersión de los datos desde el máximo al mínimo, o la varianza y desviación que cuantifican la dispersión sobre la media aritmética. Para Makar y Confrey (2005), la mayoría de los usos del término variación en estudios de investigación tienen un significado común y auto evidente que hacen que el término suela ser presentado sin definir. No obstante, la variación está muy ligada a los conceptos de variable e incertidumbre y usualmente se le mira como una medición de la cantidad en que los datos se desvían respecto a una medida de tendencia central, como la desviación media o la desviación estándar.

En realidad la variación debe verse como algo más que como una simple medida a pesar de que la variación sea un componente importante del análisis de datos. Cuando se aborda la idea de variación en un sentido estocástico, no sólo se debe mirar qué es la variación o cómo se utiliza en tanto herramienta de análisis, sino también por qué es útil dentro de un contexto. En otras palabras, es relevante considerar además de cómo se define o formaliza la variación y qué procedimientos se asocian a su uso, con qué propósitos se quiere utilizar.

Makar y Confrey (2005) consideran la variación como la cualidad de una entidad, es decir de una variable para variar, incluyendo la variación que se pueda atribuir a la incertidumbre. En contraste, para Bakker (2004, p. 14) la incertidumbre y la variación están muy relacionadas, ya que debido a que hay variabilidad, vivimos en incertidumbre, y ya que no en todas las cosas hay determinación o certeza sobre ellas, hay variabilidad. En palabras de Makar y Confrey (2005), “mientras que nadie espera que las estaturas de niños de cinco años de edad sean todas iguales, es con frecuencia difícil de comprender qué tanto varían las estaturas de los niños, y que la variabilidad atribuible a las diferencias en sus estaturas es una mezcla de factores explicativos (por ejemplo, la estatura de los padres y la nutrición) y de factores aleatorios o no explicados.

El desarrollo del concepto de variación, va más allá del simple reconocimiento de su existencia, requiere de cierta tipo de comprensión del concepto de distribución. Cuando se examina una variable en un conjunto de datos, con frecuencia es de interés descubrir patrones en la variabilidad de los datos a través por ejemplo, de presentar de manera ordenada los valores de la variable en un gráfico (Bakker, 2004). La distribución se convierte en una representación de la variación de los datos y la comprensión del aprendizaje del concepto de variación se conecta o relaciona de manera estrecha a la comprensión del concepto de distribución. Así, una meta clave en el desarrollo del razonamiento de los estudiantes es proporcionarles una visión de la distribución como una combinación o agregado de sus propias características, como su forma o su media, más que pensar en la distribución como una colección de puntos individuales. (Makar y Kazak, 2002 y Bakker, 2004).

Al comenzar a pensar acerca de qué conforma la noción de distribución, se puede pensar en las medidas que le son asociadas, en sus propiedades, o en sus características; por ejemplo, en su media, su forma, sus valores atípicos, o en su desviación estándar. Estas entidades de manera aislada, no capturan el concepto deseado y pueden empobrecer la atención en puntos o hechos individuales y no conducen a la idea que se quiere aprehender, en el sentido de verla como una distribución de alguna cosa. Pfannkuch, Budgett,

Parsonage, and Horring (2004) advierten que los estudiantes se centran en las características de una distribución, pero olvidan enfocarse en el significado de una distribución dentro del contexto de un problema. Cuando se comparan distribuciones, por ejemplo, ellos sugieren que los estudiantes primero miran la distribución y comparan sus centros, la dispersión y cualquier otra cosa valiosa, pero no se cuestionan, para sacar conclusiones, en las evidencias recopiladas.

Reading y Shaughnessy (2004, citado en Ben-zvi y Garfield, 2006) definen ‘variación’ como un sustantivo usado para describir el acto de variar o cambiar una condición y ‘variabilidad’ como una forma sustantivada del adjetivo variable, que significa que algo es apto o capaz de variar o cambiar. También estos autores hacen una distinción entre lo que se observa que varía y lo que se mide. El término ‘variabilidad se usa igualmente para representar cómo varían los datos.

ESCENARIOS PARA LA ENSEÑANZA DE LA VARIACIÓN

Variación en conjuntos de datos

Jones y otros (2000) aseguran que para exhibir pensamiento estadístico se necesita comprender conceptos de manejo de datos que son multifacéticos y se desarrollan sobre el tiempo. El manejo de datos incorpora “organizar, describir, representar y analizar datos con el apoyo de despliegues visuales”; en síntesis, implica la reducción de los datos preservando sus características esenciales, y por lo tanto, el análisis conlleva prestar atención no sólo al promedio sino a la dispersión o variación. Dicen Friel y otros (2001) que el proceso de reducción de datos y la estructura de la gráfica influyen el conocimiento gráfico. Diferentes tipos de gráficas enfatizan diversos grados de reducción de datos. En este contexto gráfico de reducción de datos los estudiantes necesitan consciencia de la importancia tanto de las medidas de tendencia central como de las de dispersión de los datos.

Otra mirada al pensamiento estadístico se enfoca en el concepto de distribución. Mellissinos (1999) centra el trabajo en torno al promedio en la comprensión de distribución. La noción de media de Mokros y Russell (1995) se ve como una medida representativa que involucra capturar un rango y una distribución de un conjunto de datos, pero es necesario distinguir entre distribución y conjunto de datos para establecer e interpretar la representatividad. De acuerdo con Mellissinos (1999), “un conjunto de datos es una colección de medidas de una o más características de objetos o personas y una distribución es un atributo del conjunto de datos que comunica cómo las medidas en el conjunto de datos están distribuidas a lo largo de un rango de valores”; sin una idea clara de distribución es difícil hacer inferencias sobre las nociones de representatividad de los estudiantes. Estos autores también investigan las nociones de forma de la distribución, centro e interacción de la dispersión y reiteran que el concepto de distribución descansa fuertemente en la noción de variabilidad o dispersión y en consecuencia, las nociones de distribución, centro y dispersión interactúan entre sí; el pensamiento estadístico está ligado a las concepciones de gráficas, centro y variación a través del tema común unificador de distribución. Shaughnessy y Pfannkuch (2002) aseveran que en una investigación, los estudiantes que atienden a la variabilidad en los datos son más capaces de predecir el rango de resultados en un intervalo que los que hacen predicciones basados en las medidas de tendencia central descartando la variabilidad en la distribución.

El punto fundamental en estas investigaciones es cómo las preguntas sobre conjuntos de datos pueden moldearse para explorar la comprensión de la variación, ya que se reconoce la importancia de mezclar la variación con conceptos estadísticos como distribuciones, promedios y gráficas.

Variación en situaciones de muestreo

La variación también puede estudiarse en las situaciones de muestreo. En éstas, la variación aparece en las diferencias entre muestras repetidas obtenidas de la misma población. La variación está ligada al tamaño de la muestra, pero también a la representatividad de la muestra. Así las situaciones de muestreo pueden invocar muchos niveles de significado de lo que consideramos como variación. A medida que se incrementa el tamaño de la muestra las estadísticas de la muestra se vuelven menos variables y estiman más cercanos los parámetros correspondientes de la población. Well y otros (1990), encuentran que al formular preguntas para juzgar muestras como más representativas, la gente usa la información acerca del tamaño de la muestra más precisamente cuando trabaja con los centros de la distribución que con los extremos; sin embargo, muchos no entienden cómo el tamaño de la muestra influye la variabilidad de la media de la muestra. Se resalta así de nuevo la importancia de comprender el concepto de distribución.

Al explorar la noción de que en las muestras pequeñas es más posible que haya resultados extremos que en las muestras grandes, Watson y Moritz (2000) encontraron que muchos estudiantes no reconocen que las muestras pequeñas son más propensas a producir resultados sesgados y piensan que la escogencia del tamaño de la muestra es al azar. Fischbein y Schnarch (1997) corroboran estos hallazgos al determinar que hay una concepción errada sobre que el tamaño de la muestra no afecta la variación. Watson y Moritz (2000) investigaron la tensión entre la eficiencia de muestras pequeñas y la confiabilidad de muestras grandes, y hallaron que algunos estudiantes creen que cualquier muestra pequeña es siempre representativa y otros creen que una muestra grande siempre es mejor sin tener en cuenta las dificultades y costos de la recolección de datos. Jacobs (1997) determina que los estudiantes asumen una correspondencia entre los resultados producidos por el método de muestreo y los resultados esperados antes del muestreo; si los resultados son los esperados, entonces el método escogido es apropiado.

La inferencia estadística involucra usar los datos que se tienen a la mano para hacer predicciones sobre la población de donde fueron tomados esos datos, la cual, dice Jacobs (1997), por definición “es imperfecta, pues todos los muestreos introducen error”. Watson y Moritz (2000) conjeturan sobre un modelo del desarrollo de los conceptos de muestreo que sugiere que “a medida que los estudiantes conocen la variación en la población reconocen la importancia de la selección de la muestra”. Los conceptos de variación y representatividad son intrínsecos a la tarea de hacer inferencias sobre poblaciones a partir de muestras de datos y las tensiones entre estos dos conceptos siempre van a existir. Rubin y otros (1991) acuerdan que es necesario balancearlos: la representatividad de la muestra como la idea de que la muestra tenga características idénticas a las de la población, con la variabilidad de la muestra como la idea de que diferentes muestras de la misma población con frecuencia no son idénticas y por lo tanto no concuerdan exactamente con la población. En un estudio Rubin y otros (1991), concluyen que los estudiantes carecen de experiencia para pensar en términos de una distribución de muestras generadas a partir de una población particular. Tareas para estimar el tamaño de la muestra con el fin de que se ajuste a la distribución binomial, y preguntas acerca de cómo es la dispersión de los valores en un conjunto de datos o cómo cierta dispersión reocurre al repetir el experimento, son buenas formas de abordar la variabilidad inherente en una situación de remuestreo (Shaughnessy y otros, 1999; Shaughnessy, 1997).

Al incorporar varios aspectos del pensamiento estadístico, como centro, dispersión y sentido de gráficas, los ambientes de muestreo se perciben muy versátiles para investigar el pensamiento sobre variación de los estudiantes, pues proveen oportunidades para mirar el efecto del tamaño de la muestra en la variación, así como para ver la manera en que muestras del mismo tamaño difieren entre sí y proveen diferentes imágenes de la población.

Variación en situaciones de probabilidad

Detrás de la mayoría del trabajo relacionado con muestreo subyace el pensamiento probabilístico; sin embargo, cuando el tamaño de la muestra es uno, los aspectos probabilísticos de la tarea son más transparentes. Por ejemplo en una tarea de sacar bolas de una urna donde el tamaño de la muestra es uno, Truran (1994) encuentra que los estudiantes tienen alguna consciencia de los números extremos y del rango. Shaughnessy (1997) menciona que cuando se les pregunta a los estudiantes por la mayor posibilidad de ocurrencia de dos puntos muestrales o resultados distintos al echar una moneda cinco veces en cada prueba, algunos tratan de sobreponer la idea de muestra donde no existe una; hay un espacio muestral en un sentido probabilístico que es distinto de muestra tomada de una población.

Al construir distribuciones de muestras repitiendo las pruebas varias veces para tomar muestras del mismo tamaño cada vez, Konold (1995) encuentra que en varias pruebas de echar cinco veces una moneda, donde el número de pruebas es el tamaño de la muestra, los estudiantes ven la variabilidad entre muestras repetidas del mismo tamaño; por ejemplo, determinan que los resultados en una distribución de 1000 muestras varían de los de otra distribución de 1000 muestras, y así Konold (1995) afirma que “los diferentes resultados de cada repetición revelan la variabilidad inherente al proceso de muestreo y dan algún sentido de la magnitud de la variabilidad para el tamaño de muestra dado”. Trabajar con estas muestras obtenidas de las pruebas de un experimento ayuda en la definición de los espacios muestrales, como en una tarea con ruletas donde Shaughnessy y Ciancetta (2001), encuentran que los estudiantes pudieron construir el espacio muestral después de recolectar los datos y ver la variación en muestras repetidas de 10 pruebas; dicen estos autores que los estudiantes “pueden hacer una conexión entre la variación observada en los datos en pruebas repetidas de un experimento y los resultados que se pueden esperar basados en el conocimiento del espacio muestral subyacente o una distribución de probabilidad”. Los experimentos repetidos en probabilidad pueden centrar la atención en la variación inherente de los resultados, más que en el valor esperado de un resultado particular, y así ofrecen una promesa como contextos viables para recoger información sobre las concepciones de variabilidad.

CONCLUSIONES

El panorama presentado respecto a la idea de variación pone de relieve la importancia de tenerlo en cuenta como constructo directriz para planear y fundamentar la educación estadística tanto a nivel escolar como universitario. Se ha tratado de argumentar que el estudio de la variación desde una perspectiva estocástica tiene una importancia tan relevante como la que se plantea para el pensamiento variacional desde el álgebra y el cálculo, pues tiene una caracterización que la hace fundamentalmente diferente.

Dentro de los aspectos a destacar, se debe tener en cuenta que la variación es concepto que está inmerso en conceptos como los de aleatoriedad, construcción de modelos estocásticos, y distribuciones de probabilidad, de muestreo y de datos. Por otra parte, además de sugerir la necesidad de enfocar la instrucción con base en un modelo de enseñanza coherente con la idea de variación desde lo estocástico, se proponen tres escenarios generales, para el diseño curricular y el aprendizaje de lo estocástico, que pueden dar cuenta de diferentes aspectos de la variación y de su complejidad: el de análisis de datos, el de situaciones de muestreo y el de situaciones de probabilidad.

REFERENCIAS

- Bakker, A. (2004). *Design research in statistics education. On symbolizing and computer tools*. Utrecht: Center for Science and Mathematics Education.
- Ben-zvi, D. y Garfield, J. (2006). Research on reasoning about variability: a forward. *Statistics Education Research Journal* 3(2), 4-6.
- Fischbein, E., & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28 (1), 96-106.
- Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32, 124-158.
- Guacaneme, E., Andrade, L., Perry, P. y Fernández, F. (2003) ¿Confía en sus conocimientos geométricos para construir figuras semejantes? En P. Perry, E. Guacaneme, L. Andrade y F. Fernández (Eds.), *La enseñanza de la proporcionalidad, un hueso duro de roer*. Bogotá: una empresa docente.
- Jacobs, V. (1997). Children's understanding of sampling in surveys. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Chicago, IL.
- Jones, G., Thornton, C., Langrall, C., Mooney, E., Perry, B., & Putt, I. (2000). A framework for characterizing children's statistical thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (4), 269-307.
- Konold, C. (1995). Confessions of a coin flipper and would-be instructor. *American Statistician*, 49 (2), 203-210.
- Makar, K. y Confrey, J. (2005). "Variation-talk": articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 4(1), 27-54,
- MEN (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- MEN (2000). *Estándares curriculares en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Meletiou, M. (2000). Developing students' conceptions of variation: an untapped well in statistical reasoning. The University of Texas at Austin.
- Mellissinos, M., (1999). What the Mean Does (and Does Not) Tell Students About a Distribution. Paper presented at the Research Pre-session of the 77th Annual Meeting of the National Council of Teachers of Mathematics.
- Mokros, J., & Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 20-39.
- Moore, D. (1997). New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics. *International Statistical Review* 65, 123-165.
- Pfannkuch, M. (1997). Statistical Thinking: One statistician's perspective. En F. Biddulph y K. Carr (Eds.), *People in mathematics education. Proceedings of 20th annual conference of Mathematics Education Research Group of Australia* (pp.406-413). Rotorua, New Zealand.
- Rubin, A., Bruce, B., y Tenney, Y. (1991). Learning about sampling: Trouble at the core of statistics. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics*, Vol. 1, pp. 314-319, Voorburg. The Netherlands: International Statistical Institute.
- Shaughnessy, J. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. In F. Bidduch & K. Carr (Eds.), *Proceedings of the 20th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, (pp. 6-22). Rotorua, NZ: MERGA.
- Shaughnessy, J., Watson, J., Moritz, J., & Reading, C. (1999). School mathematics students' acknowledgement of statistical variation. In C. Maher (Chair), *There's more to life than centers. Pre-session Research Symposium, 77th Annual National Council of Teachers of Mathematics Conference*, San Francisco, CA.

- Shaughnessy, J. y Ciancetta, M. (2001). Conflict between students' personal theories and actual data: The spectre of variation. Paper presented at the Second International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy. Armidale, NSW Australia.
- Shaughnessy, J., & Pfannkuch, M. (2002). How faithful is Old Faithful? Statistical thinking: A story of variation and prediction. *Mathematics Teacher*, 95 (4), 252-270.
- Truran, J. (1994). Children's intuitive understanding of variance. In J. Garfield (Ed.), *Research Papers from the 4th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 4)*. Minneapolis, MN: International Study Group for Research on Learning Probability and Statistics.
- Vasco, C.E. (2003). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías En *Tecnologías computacionales en el currículo de matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Watson, J. M., & Moritz, J. B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 44-70.
- Well, A., Pollatsek, A., & Boyce, S. (1990). Understanding the effects of sample size on the variability of the mean. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, 47, 289-312.
- Wild, C. J. & Pfannkuch, M. (1999), Statistical Thinking in Empirical Enquiry, *International Statistical*